Théorie Ergodique : Le théorème de Birkhoff

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace de proba.
Soit $T : X \to X$ une transformation qui preserve μ.

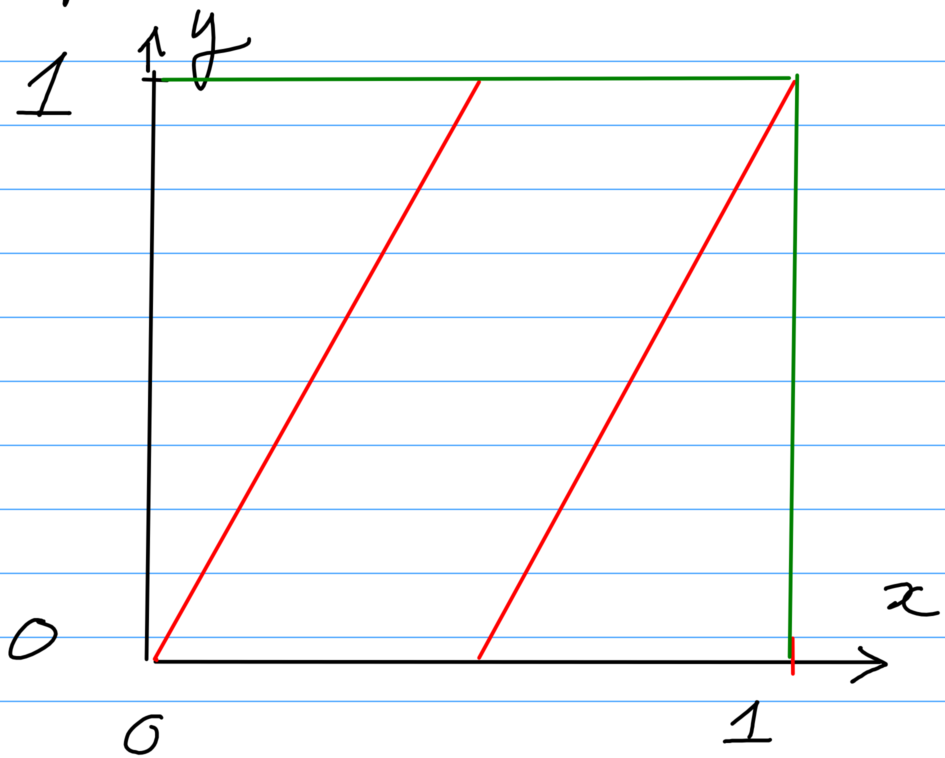
Thm [Birkhoff '31]
Soit $f \in L^1(\mu)$. Alors il existe une fct $\bar{f} \in L^1(\mu)$ t.q.:

1) $\bar{f}(x) = \bar{f}(Tx)$ pour μ-p.t. x

2) $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) \xrightarrow[n \to \infty]{} \bar{f}(x)$ $(\mu\text{-p.t. } x)$

3) Si $A \in \mathcal{B}$, $T^{-1}A \Delta A = 0$: $\int_A f \, d\mu = \int_A \bar{f} \, d\mu$

Exemple : $T(x) = 2x \mod 1$



$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \circlearrowleft T$

T preserve la mesure de Lebesgue λ et T est λ-ergodique

Pour tout $f \in L^1(S^1)$ on a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_{S^1} f \, d\lambda$$

pour Lebesgue p.t. $x \in S^1$