# Activités de Recherche de Hans Henrik Rugh.

Ordre chronologique. 14 octobre 2009

Mes intérêts principaux sont les systèmes dynamiques et la physique mathématique. Ci-dessous j'ai essayé de donner un résumé en grandes lignes de mes travaux. Les numéros font références à la liste de travaux jointe à la fin.

1. Pendant les deux premières années de mon doctorat j'ai travaillé avec F. Christiansen et autres collaborateurs sur les opérateurs de transfert associés aux systèmes dynamiques dilatants. Nous avons étudié la décroissance des fonctions de corrélation liée au spectre d'un opérateur de transfert ([1],[2] et [3]).

2. Il est bien connu [(Ruelle76) D. Ruelle, *Invent. Math.* **34**, 231-242 (1976). (Fried86) D. Fried, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.* **19**, 491 (1986).], que si un système dynamique uniformément dilatant est analytique réelle, ses propriétés spectrales, voir ergodiques, sont liées aux propriétés analytiques des fonctions zêta dynamiques. Ces fonctions sont construites à partir des orbites périodiques du système et elles sont méromorphes dans le plan complexe. Cette théorie s'applique aussi à une classe de systèmes hyperboliques lorsque les feuilletage stables et instables sont analytique, car on peut se ramener au cas uniformément dilatant via une projection. Or, cette classe est très petite et elle n'est même pas structurellement stable sous perturbations analytiques [É. Ghys, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **20** (1987), pp. 251-270.]

   Dans ma thèse de doctorat [5], publié dans [6], j'ai construit des espaces de fonctions et une théorie spectrale pour une classe d'applications analytiques réelles et hyperboliques. J'ai montré que cette construction évite la projection décrite ci-dessus. Ensuite dans [12] dans le cas d'Axiom A, j'ai expliqué comment construire un déterminant de Fredholm généralisé et une fonction zêta de Selberg généralisée et j'ai démontré que les deux fonctions sont *entières* en dimension 3 pour les flots et dimension 2 pour les difféomorphismes. L'énoncé dans ce dernier cas est le suivant : Soit $M$ une surface et $f : M \to M$ un difféomorphisme analytique réelle et Axiom A sur l'ensemble basique $\Lambda \subset M$. Soit $g$ une fonction analytique de $\Lambda$. Alors

   $$d(z) = \exp\left( - \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n} \sum_{x\in \mathrm{Fix} f^n|\Lambda} \frac{g(f^{n-1}x)\cdots g(x)}{|\det\,(Df^n(x) - \mathbf{1})\,|} \right)$$

   admet un prolongement analytique dans $\mathbb{C}$. La théorie combine la théorie spectrale d'opérateurs dans un espace de Banach avec la géométrie différentielle du flot et difféomorphismes des surfaces et variétés.

3. En 1995, j'ai été attiré par le problème suivant. Peut on conclure qu'un système hamiltonien de degré $2N$ n'est pas intégrable (i.e. il n'existe pas $N$ intégrales premières, analytiques réelles, en involution et indépendantes presque partout) s'il existe une orbite périodique hyperbolique ayant une intersection transverse homoclinique (ce qui signifie que les variétés stable et instable se coupent transversalement et que le système possède des 'fers à cheval') ? Cette conclusion a été conjecturée par H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* vols, 1,2,3 (Gauthier-Villars, Paris 1892) ; reprinted by Dover, N.Y. (1957). Or, une preuve semble être difficile quand $N$ est plus grand que 2 (une preuve facile pour $N = 2$ a été donnée dans [R. Cushman, em Trans. Amer. Soc. **238**, 45 (1978)]).
   Dans [11] j'ai travaillé avec F.Christiansen et S.E. Rugh pour étudier ce problème numériquement pour un certain système dynamique, voir aussi E.S. Nikolaevskii and L.N. Schur, *Sov. Phys. JETP* **58** (1), 1-7 (1984). Le problème, qui m'intéresse toujours, reste ouvert.

4. Dans [14], ensuite [16] et [21], j'ai utilisé des outils de la géométrie différentielle pour étudier l'ensemble micro-canonique de la mécanique statistique. Cet ensemble apparaît de façon naturelle lors de la simulation numériques des systèmes hamiltoniennes à énergie constante. Sur une variété symplectique $(M, \omega)$ de dimension $2n < +\infty$ notons $m = \wedge^n \omega$ la forme de volume de Liouville et $dm$ la mesure associée. Soit (l'hamiltonienne) $H$ une fonction $C^\infty$, propre et non constante. Lorsque $E$ est une valeur régulière de

$H$ (par Sard ceci est générique en mesure) $d\mu_E = \delta(H-E)\, dm$ définit une mesure finie sur la surface d'énergie constante $H = E$. En normalisant on obtient la moyenne dite micro-canonique :

$$\langle\, A \mid E \,\rangle = \frac{\int A(\xi)\, \delta(H-E)\, dm}{\int \delta(H-E)\, dm}.$$

Sous l'hypothèse d'ergodicité ceci peut être calculé comme moyenne temporelle $\mu_E$-p.s., d'où l'importance pour les simulations numériques. Maintenant, si $X$ est un champs de vecteur définit au voisinage de $\{H = E\}$ qui vérifie $dH(X) \equiv 1$, alors j'ai démontre dans [16] l'identité remarquable

$$\frac{\partial}{\partial E}\langle\, A \mid E \,\rangle = \langle\, \mathrm{div}_m\, (XA) \mid E \,\rangle \;-\; \langle\, \mathrm{div}_m(X) \,\rangle \,\langle\, A \mid E \,\rangle,$$

où $\mathrm{div}_m(\cdot)$ dénote la divergence d'un champs de vecteur par rapport à la mesure $m$. En utilisant cette identité (parmi d'autres) je montre que nombreuses quantités thermodynamiques, comme la température, chaleur spécifique, pression, dérivée de la pression etc..., peuvent être exprimées eux-mêmes comme des moyennes des observables explicites dans l'ensemble lui-même, et sous l'hypothèse d'ergodicité, calculable comme moyennes temporelles. Cette théorie s'est avéré très utile dans le domaine de 'molecular dynamics simulation' en physique et chimique théorique. Actuellement je travaille sur d'autres applications et généralisations du formalisme que j'ai introduit.

5. Dans [17], j'ai étudié les systèmes analytiques uniformément dilatants à l'exception d'un point fixe parabolique. Sur un espace de fonctions convenable j'ai considéré un opérateur de transfert $L = L_0 + L_1$ où $L_0$ est associé à la branche parabolique et $L_1$ décrit les autres branches uniforméments dilatantes. Le spectre de $L_0$ est précisément le segment $[0, 1]$ et $L_1$ est nucléaire (d'ordre zéro au sens de Grothendieck). J'ai montré que

$$d(\lambda) = \det\left(\mathbf{1} - (\lambda - L_0)^{-1} L_1\right)$$

admet un prolongement analytique dans $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ où les zéros sont précisément les valeurs propres de $L$ (la multiplicité vaut l'ordre du zéro). J'ai aussi montré que $d(\lambda)$ peut s'exprimer en termes des multiplicateurs aux points fixes dilatantes. Sous certaines conditions, $d(\lambda)$ admet un prolongement analytique des deux cotés de l'intervalle ouvert $]0, 1[$. Je travaille actuellement sur des cas particuliers (l'application de Farey et des variations de celle-ci) qui admettent des prolongements analytiques particulièrement intéressants. Le travail combine plusieurs idées de Ruelle, Grothendieck et Shishikura.

6. En 1988, LA Bunimovich and Ya. G. Sinai, Space-time [chaos in coupled map lattices, Nonlinearity 1 (1988) 491-519] ont étudié les propriété ergodique d'un réseau d'applications dilatantes faiblement couplées. Plus précisément on regarde le produit directe sur un réseau ($\Lambda = Z^d$) des applications uniformément dilatantes du cercle $f_i(z_i)$, $i \in \Lambda$, $z_i \in S^1 \equiv \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On compose ensuite avec une application $T : \prod_\Lambda S^1 \to \prod_\Lambda S^1$ qui est une petite perturbation de l'identité et qui fait intervenir les variables voisines du réseau. Leur approche était inspirée par la mécanique statique en faisant des calculs pour un réseau fini que ensuite l'on fait tendre vers le réseau infini en prenant soins des problèmes du bord.

   Avec Torsten Fischer[19], nous avons construit un espace de Banach directement pour le réseau infini tel que l'opérateur de transfert ait un 'trou spectral' ce qui implique directement les propriétés ergodiques souhaitées. Ensuite avec V. Baladi [20] nous avons étudié l'effet des symétries de translation sur le spectre. On obtient ce que l'on appelle un spectre de Floquet. Nous avons obtenu des résultats de régularité forte (analyticité réelle) de ce spectre par rapport au tore $\widehat{\Lambda} = \mathbb{T}^n$ (le groupe de caractères associé à $\Lambda$) Finalement les restrictions sur le couplage ont été considérablement réduites dans [23]. Ceci permet de considérer un couplage spatial qui est simplement 'sommable', en particulier de façon polynomiale ce qui donnera lieu a une décroissance de corrélation spatiale polynomiale.

7. Dans [25] j'ai présenté une démonstration élémentaire (et plus générale) de la formule de Bowen pour la dimension de Hausdorff d'un répulseur conforme de classe $C^1$. Ensuite j'ai considéré une suite aléatoires d'applications $C^1$-conformes et uniformément dilatantes sur un espace métrique. Sous des hypothèses d'uniformité j'ai montré que l'ensemble de Julia aléatoire aura une dimension de Hausdorff presque sûrement la même et que cette valeur commune est donnée par une généralisation de la formule de "Bowen".

Lorsque l'espace est une surface de Riemann on obtient même une dépendance analytique réelle des paramètres.

Voici un exemple : Prenons $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ avec $|a| + r < \frac{1}{4}$ et $\lambda > 0$. Soient $(c_n)$ une suite de i.i.d variables aléatoires distribués uniformément dans le disque $B(a,r)$ et $(N_n)$ une suite de i.i.d. v.a. qui suivent une loi de Poisson de paramètre $\lambda$. Considérons la suite d'application conforme $f_n(z) = z^{N_n+2} + c_n$. L'ensemble

$$J\left((f_n)_{n\geq 1}\right) = \partial\{z \in \mathbb{C} : f_n \circ \cdots \circ f_1(z) \underset{n}{\longrightarrow} \infty\}$$

décrit un ensemble de Julia 'aléatoire'. Alors la dimension de Hausdorff est p.s. la même, et la valeur commune $d(a, r, \lambda)$ dépends de façon analytique réelle de $a$, $r$ et $\lambda$.

Dans un travail avec S. Alili [26], nous avons utilisé des outils similaires pour étudier la régularité par rapport aux paramètres de la probabilité d'extinction d'un processus de branchement.

8. Plus récemment, dans [27] j'ai étudié des généralisations du célèbre Théorème de Perron-Frobenius dans le contexte des opérateurs (et matrices) complexes. Le contexte historique est le suivant : Soit $K$ un cône convexe dans un espace vectoriel réel et munissons $K^* = K \setminus \{0\}$ avec sa métrique projective d'Hilbert $d_K$. Supposons que l'opérateur linéaire borné $T$ préserve $K^*$. G.Birkhoff à démontré en 1957 que la métrique d'Hilbert $d_K$ pour un tel cône satisfait un *principe de contraction uniforme* : Soit $\Delta = \sup_{x,y\in K^*} d_K(Tx, Ty) \in [0, +\infty]$ le diamètre de $T(K^*)$ dans $(K, d_K)$ alors pour tout $x, y \in K^*$ :
   $d_K(Tx, Ty) \leq \theta\, d_k(x, y)$ avec $\theta = \tanh \frac{\Delta}{4}$. En particulier, dès que $\Delta < +\infty$ l'application est une contraction Lipschitzienne uniforme pour la métrique d'Hilbert. Moyennant quelques hypothèses géométrique sur le cône par rapport à l'espace vectoriel ceci implique que $T$ possède une valeur propre simple maximale (d'où le Théorème de Perron-Frobenius).
   Disons qu'un opérateur borné sur un espace de Banach complexe a un trou spectral s'il possède une valeur propre simple $\lambda \in \mathbb{C}$ et que le reste du spectrum est contenu dans un disque de rayon strictement inférieur à $|\lambda|$. Dans ce cadre j'ai introduit la notion d'un cône complexe avec une jauge hyperbolique projective associée et montré que cette jauge vérifie un principe de contraction uniforme. Dans le cas de dimension finie on trouve par exemple le théorème suivant : Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices $A$ de taille $n \times n$ avec la propriété suivante : Il existe $0 < c < +\infty$ tel que $|\mathrm{Im} A_{ij} \overline{A}_{kl}| < c \leq \mathrm{Re} A_{ij} \overline{A}_{kl}$ pour toutes les indices. Alors, ces matrices contractent le même cône complexe et par conséquence : (1) Toute $A \in \mathcal{A}$ possède un trou spectral. (2) Tout produit fini des telles matrices possède un trou spectral.
   Loïc Dubois, étudiant en thèse soutenue en juin 2009, a développé plusieurs applications utilisant les cônes complexes. Il a déjà amélioré les conditions pour la contraction, voir *J London Math Soc* **79** (2) 719-737 (2009) et obtenu des estimations de vitesse convergence du TLC pour un produit des matrices aléatoires (travail de Dubois en préparation).

<u>Encadrement de thèse :</u>

Torsten Fischer (oct 1995 - dec 1998). Sujet : Applications dilatantes accouplées (sur un réseau $Z^d$) et la décroissance exponentielle des fonctions de corrélation.

Mark Bowles (oct 1997 - oct 2000) Sujet : Une variante de la théorie de Nekhoroshev sur la vitesse de diffusion dans un système presque intégrable qui admet une symétrie.

Frédéric Millet (oct 2001 - juin 2005, interrompu) Sujet : Sur la formalisme thermodynamique micro-canonique. Point de vue géométrie différentielle. En sept 2005 il a changé directeur de thèse

Loïc Dubois (dec 2005 - juin 2009). Sujet : Contractions des cônes complexes et exposants caractéristiques.

## Liste des travaux


(1) F. Christiansen, G. Paladin, H.H. Rugh, Determination of correlation spectra in chaotic systems. **Phys. Rev. Lett. 65**, 2087-2093 (1990).

(2) F. Christiansen, S. Isola, G. Paladin, H.H. Rugh, Mixing rates and exterior forms in chaotic systems. **J. Phys. A : Math. Gen. 23**, L1301-1305 (1990).

(3) F. Christiansen, P. Cvitanović, H.H. Rugh, The spectrum of the period-doubling operator in terms of cycles. **J. Phys. A : Math. Gen. 23**, L713-717 (1990).

(4) H.C. Fogedby, M.H. Jensen, Y.-C. Zhang, T. Bohr, H.J. Jensen, H.H. Rugh, Temporal fluctuations of an Ideal Brownian Gas. **Mod. Phys. Lett. B 5**, 1837-1848 (1991).

(5) H.H. Rugh, Time Evolution and Correlations in Chaotic Dynamical Systems. *thèse de doctorat, Niels Bohr Institute,* 1992.

(6) H.H. Rugh, The Correlation spectrum for Hyperbolic Analytic Maps. **Nonlinearity**, **5**, 1237-1263 (1992).

(7) P. Cvitanović, P. Rosenqvist, G. Vattay, and H.H. Rugh, A Fredholm Determinant for Semi-classical Quantization. **CHAOS 3**, 619-636 (1993).

(8) A. Johansen, P. Dimon, C. Ellegaard, J.S. Larsen, and H.H. Rugh, Dynamic Phases in a Spring-block System. **Physical Review E**, **48**, 4779-4790 (1993).

(9) H.H. Rugh, On the asymptotic form and the reality of spectra of Perron-Frobenius operators. **Nonlinearity**, **7**, 1055-1066 (1994).

(10) H.H. Rugh, Fredholm determinants for real-analytic hyperbolic diffeomorphisms of surfaces. XIth International Congress of Mathematical Physics (Paris, 1994), 297–303, Int. Press, Cambridge, MA, 1995.

(11) F. Christiansen, H.H. Rugh, S.E. Rugh, Painlevé integrability and periodic orbits for the mixmaster universe model. **J. Phys. A : Math. Gen. 28**, 657-667 (1995).

(12) H.H. Rugh, Generalized Fredholm Determinants and Selberg Zeta Functions for Axiom A Dynamical Systems. **Erg. Th. & Dyn. Syst.**, **16**, 1-15 (1996).

(13) H.B. Nielsen, H.H. Rugh, S.E. Rugh, Chaos, Scaling and Existence of a Continuum Limit in Classical Non-Abelian Lattice Gauge Theory. 28th Int. Conf. on High Energy Physics in Warzaw (1996).

(14) H.H. Rugh, A Dynamical Approach to Temperature. **Phys. Rev. Lett. 78**, no. 4, 772-774 (1997).

(15) F. Christiansen, H.H. Rugh, Computing Lyapunov spectra with continuous Gram-Schmidt orthonormalization. **Nonlinearity**, vol 10. no **5**, 1063-1072 (1997).

(16) H.H. Rugh, Geometric, dynamical approach to thermodynamics, **J. Phys. A : Math. Gen. 31**, 7761-7770 (1998).

(17) H.H. Rugh, Intermittency and Regularized Fredholm Determinants, **Inventiones Mathematicae**, **135**, 1-24 (1999).

(18) H.H. Rugh, Lyapunov bounds for lattice gauge dynamics, **Comm. Math. Phys. 200**, 487-494 (1999).

(19) T. Fischer, H.H. Rugh, Transfer Operators for Coupled Analytic Maps, **Erg. Th. & Dyn. Syst. 20**, 109-143 (2000).

(Proc.) Geometry, dynamics and thermodynamics. Dynamical systems (Luminy-Marseille, 1998), 98–104, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2000.

(20) V. Baladi, H.H. Rugh, Floquet spectrum of weakly coupled map lattices, **Comm. Math. Phys. 220**, 561-582 (2001).

(21) H.H. Rugh, Microthermodynamic formalism, **Phys.Rev. E**, vol. 64 no.**5**, 055101 (4 pages) (2001).

(22) V. Baladi, Y. Jiang, H.H. Rugh, Dynamical determinants via dynamical conjugacies for postcritically finite polynomials, **J Stat.Phys.**, vol. 108 no **516**, 973-993 (2002).

(23) H.H. Rugh, Coupled maps and analytic function spaces, **Ann.Sci.Ec.Norm.Sup.**, $4^e$ série, t.**35**, 489-535 (2002).

(24) G. Keller, H.H. Rugh, Eigenfunctions for smooth expanding circle maps, **Nonlinearity**, vol 17, **no 5**, 1723 - 1730 (2004).

(Proc.) H. H. Rugh, Spectra of analytic hyperbolic maps and flows : Correlation functions, Fredholm determinants and zeta-functions 4 pp (2005), http ://www.dma.ens.fr/∼baladi/rughman.pdf

(25) H.H. Rugh, On the dimensions of conformal repellers. Randomness and parameter dependency, **Annals of Math**, vol **168**, no **3**, 695 - 748 (2008).

(26) S. Alili, H.H. Rugh, On the regularity of the extinction probability of a branching process in varying and random environments, **Nonlinearity**, vol 21, **no 2**, 353 - 359 (2008).

(27) H.H. Rugh, Cones and gauges in complex spaces : Spectral gaps and complex Perron-Frobenius theory, Accepté pour publication dans **Annals of Math** (2007) http ://annals.math.princeton.edu/issues/2007/FinalFiles/RughFinal.pdf