170. Formes quadratiques : questions

On désigne toujours par K un corps de caractéristique différente de 2 et par E un K-espace vectoriel de dimension finie. On rappelle qu'une forme quadratique q sur E est *anisotrope* [1] ou *définie* si pour tout vecteur non nul x de E, on a $q(x) \neq 0$.

1. Parmi les assertions suivantes, démontrer celles qui sont vraies et donner un contre-exemple pour celles qui sont fausses.

a) Si q est une forme quadratique non dégénérée sur E, alors la restriction de q à tout sous-espace F de E est non dégénérée.

b) Soit F un sous-espace de E. Si q une forme quadratique sur E et si la restriction de q à F est non dégénérée, alors q est non dégénérée.

c) Soit q une forme quadratique non dégénérée sur E. On suppose qu'il existe $a \neq 0$ dans E tel que $q(a) = 0$ (autrement dit, q n'est pas anisotrope). Alors l'application $q : E \to K$, $x \mapsto q(x)$ est surjective.

2. On appelle *u-invariant* du corps K l'élément de $\mathbf{N}^* \cup \{+\infty\}$ défini comme le sup des entiers $n \geq 1$ qui ont la propriété suivante : il existe une forme quadratique anisotrope de rang n sur le corps K. Déterminer le u-invariant des corps : $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{F}_q$.

3. Soient V, V' deux K-espaces vectoriels, équipés respectivement de deux formes quadratiques non dégénérées q, q'. Soit U un sous-espace vectoriel de V. On considère un morphisme injectif $s : U \to V'$ qui est *métrique*, i.e. on a $q'(s(x)) = q(x)$ pour tout $x \in U$. On suppose que la restriction de q à U est dégénérée et on choisit $x \neq 0$ dans $U \cap U^{\perp}$. On désigne par φ, φ' les formes polaires respectives de q et q'.

a) Montrer que pour tous $u, v \in U$, on a $\varphi'(s(u), s(v)) = \varphi(u, v)$.

b) Montrer qu'il existe une forme linéaire l sur U et un vecteur $y \in V$ tels que : $l(x) = 1$ et $l(u) = \varphi(u, y)$ pour tout $u \in U$.

[1] Attention, il vaut mieux éviter de parler de "sous-espace isotrope", qui selon les auteurs signifie que la restriction de q à ce sous-espace est dégénérée ou que cette restriction n'est pas anisotrope; *sous-espace totalement isotrope* est par contre clair, cela signifie que la restriction de q à ce sous-espace est nulle.

c) Montrer qu'on peut de plus imposer que $q(y) = 0$.

d) On pose alors $U_1 = U + Ky$. Montrer que U est un hyperplan de U_1, et que s se prolonge en un morphisme métrique injectif de U_1 dans V'.

4. Soient V, V' deux K-espaces vectoriels, équipés respectivement de deux formes quadratiques non dégénérées q, q'. Soit U un sous-espace vectoriel de V. On considère un morphisme injectif métrique $s : U \to V'$. On suppose de plus que les formes q et q' sont équivalentes. Le but de l'exercice est de montrer que s se prolonge en un isomorphisme métrique de V sur V' (théorème de Witt).

a) Montrer en utilisant l'exercice **3.** qu'on peut supposer $V = V'$, $q = q'$, et la restriction de q à U non dégénérée. On raisonne à partir de maintenant par récurrence sur $\dim U$.

b) On suppose que $U = K.x$ est de dimension 1 et on pose $y = s(x)$. Montrer qu'il existe $\varepsilon \in \pm 1$ tel que $q(x + \varepsilon y) \neq 0$.

c) Avec les notations de b), montrer que l'orthogonal H de $z := x + \varepsilon y$ est un hyperplan. En considérant la symétrie σ par rapport à H parallèlement à Kz, montrer le théorème de Witt quand $\dim U = 1$.

d) On suppose $\dim U > 1$. Montrer que U admet une décomposition $U = U_1 \oplus U_2$, où $U_2 = U \cap U_1^{\perp}$ est l'orthogonal de U_1 dans U et les dimensions de U_1 et U_2 sont > 0. Montrer qu'on peut alors se ramener au cas où la restriction de s à U_1 est l'identité.

e) En déduire le théorème de Witt.

f) Soient F, F' deux sous-espaces de V tels que les restrictions de q à F et F' soient équivalentes. Montrer qu'il existe un automorphisme métrique u de V tel que $u(F) = F'$ (autre forme du théorème de Witt).

5. Soit q une forme quadratique non dégénérée sur E. Soient F et G des sous-espaces de E. En utilisant l'exercice **4.** :

a) Montrer que si les restrictions de q à F et G sont équivalentes, il en va de même des restrictions de q à $F^{\perp}$ et $G^{\perp}$.

b) Montrer que si on a des décompositions en sommes directes orthogonales :

$$E = (\bigoplus_{i=1}^{r} H_i) \oplus F = (\bigoplus_{j=1}^{s} H'_j) \oplus F',$$

où les H_i, H'_j sont des plans hyperboliques et les restrictions de q à F et F' sont anisotropes, alors $r = s$; de plus, les restrictions $q_{|F}$ et $q_{|F'}$ sont isomorphes.