170. Formes quadratiques : indications de solutions

1. a) C'est faux : si $F = Kx$ est de dimension 1, dire que la restriction de q à F est non dégénérée signifie que $q(x) \neq 0$. Or q peut très bien avoir des vecteurs non nuls x isotropes même en étant non dégénérée, par exemple $q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ sur K^2.

b) C'est faux : là encore prendre $E = K^2$ avec q dégénérée et non nulle, par exemple $q(x_1, x_2) = x_1^2$. Alors si $x = (1, 0)$ on a $q(x) \neq 0$ donc la restriction de de q à Kx est non dégénérée.

c) C'est vrai. En effet, on a vu qu'il existe alors un plan P (dit hyperbolique) contenant a, et telle que la restriction de q à P s'écrive $q(x_1, x_2) = 2x_1x_2$ (où x_1, x_2 correspondent à des coordonnées dans une base bien choisie de P). Comme K est de caractéristique différente de 2, on voit alors que $q(P) = K$, donc a fortiori $q(E) = K$. Noter que ce serait faux si q était dégénérée, par exemple $q(x_1, x_2) = x_1^2$ sur $\mathbf{R}^2$.

2. Noter qu'on a toujours la forme de rang 1 définie par $q(x) = x_1^2$ qui est anisotrope. Si on est sur $\mathbf{C}$, une forme de rang au moins 2 est isomorphe à une forme définie sur $\mathbf{C}^n$ par

$$q(x_1, ..., x_n) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_m^2,$$

avec $2 \leq m \leq n$. Alors $q(i, -i, 0, ..., 0) = 0$ donc q n'est pas anisotrope. Ainsi $u(\mathbf{C}) = 1$. Sur $\mathbf{R}$, il y a des formes anisotropes de degré arbitrairement grand, car $q(x_1, ..., x_n) = x_1^2 + ... + x_n^2$ est anisotrope. Ainsi $u(\mathbf{R}) = +\infty$. Enfin, si $K = \mathbf{F}_q$ avec q impair, il existe $a \in \mathbf{F}_q^*$ qui n'est pas un carré, et on voit alors que la forme $q(x_1, x_2) = x_1^2 - ax_2^2$ est anisotrope d'où $u(\mathbf{F}_q) \geq 2$. Par contre, une forme de rang au moins 3 ne peut pas être anisotrope. En effet, une telle forme est isomorphe à

$$q(x_1, ..., x_n) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + ... + a_nx_n^2.$$

Posons $c = 1$ et $x_4 = ... = x_n = 0$. Il suffit alors de voir que l'équation

$$ax_1^2 + bx_2^2 + c = 0 \tag{1}$$

a une solution dans $\mathbf{F}_q$. Cette équation s'écrit aussi

$$x_1^2 = \frac{-c - bx_2^2}{a}.$$

Or, on sait que $(q+1)/2$ éléments de $\mathbf{F}_q$ s'écrivent sous la forme x_1^2 avec $x_1 \in \mathbf{F}_q$, et de même $(q+1)/2$ éléments de $\mathbf{F}_q$ s'écrivent sous la forme $\frac{-c-bx_2^2}{a}$ avec $x_2 \in \mathbf{F}_q$, vu que $y \mapsto \frac{-c-by}{a}$ est une bijection de K dans K. Comme $(q+1)/2 + (q+1)/2 > q = \#\mathbf{F}_q$, au moins un élément de $\mathbf{F}_q$ est des deux formes, donc (1) a bien une solution dans $\mathbf{F}_q$. Finalement, on obtient que $u(\mathbf{F}_q) = 2$.

3. a) Cela résulte facilement de l'identité de polarisation

$$\varphi(u,v) = \frac{1}{2}(q(u+v) - q(u) - q(v))$$

et de l'identité analogue pour φ' et q'.

b) Comme x est non nul, il existe une forme linéaire l sur V telle que $l(x) = 1$. Comme φ est non dégénérée, l'application linéaire qui envoie tout $z \in V$ sur $\varphi(.,z)$ est un isomorphisme de V sur V^*. Ainsi l s'écrit $\varphi(.,y)$ pour un certain $y \in V$. Il suffit alors de restreindre l à U.

c) Posons $y' = y + \alpha x$ avec $\alpha \in K$. Alors $q(y') = q(y) + 2\alpha\varphi(y,x)$ car $q(x) = 0$ et $\varphi(u,y') = \varphi(u,y) = l(u)$ pour tout $u \in U$ puisque $x \in U^\perp$. Il suffit alors de remplacer y par y' en prenant $\alpha = -\frac{q(y)}{2\varphi(y,x)}$.

d) Comme y n'est pas dans U (vu que $\varphi(y,x) = l(x) = 1$ tandis que x est orthogonal à tout vecteur de U), on obtient que U est un hyperplan de U_1. On applique maintenant la même construction à $U' = s(U) \subset V'$, $x' = s(x)$ et $l' = l \circ s^{-1}$ (qui est une forme linéaire sur U'). Noter que x' est bien dans l'orthogonal de U' via a). On obtient que U' est un hyperplan de $U_1' := U' \oplus Ky'$, où y' vérifie $q'(y') = 0$ et $l' = \varphi'(.,y')$ sur U'. On prolonge s en un morphisme métrique (via a) s_1 de U_1 dans V' en posant $s_1(y) = y'$.

4. a) Comme q et q' sont équivalentes, on se ramène immédiatement au cas $V = V'$, $q = q'$. En raisonnant par récurrence sur la dimension de U, l'exercice 3. permet aussi de se ramener au cas où la restriction de q à U est non dégénérée (puisque tant que ce n'est pas le cas, on peut prolonger s à un morphisme métrique d'un espace de dimension $\dim U + 1$ dans V).

b) Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas. Alors $q(x+y) = 0$ et $q(x-y) = 0$, d'où en additionnant $2(q(x) + q(y)) = 0$ ou encore $q(x) = 0$ puisque $q(x) = q(y)$ vu que s est un morphisme métrique. Ceci contredit le fait que la restriction de q à $U = Kx$ est non dégénérée.

c) Comme la restriction de q à Kz est non dégénérée, on sait que V est somme directe orthogonale de Kz et $(Kz)^\perp$, ce qui montre que $(Kz)^\perp$ est un hyperplan H de V. On sait alors que σ est une isométrie (=isomorphisme métrique) de V, avec $\sigma(x-\varepsilon y) = x - \varepsilon y$ vu que $x - \varepsilon y \in H$ (en effet $\varphi(x-\varepsilon y)(x+\varepsilon y) = q(x) - q(y) = 0$). D'autre part $\sigma(x+\varepsilon y) = -x - \varepsilon y$ car $z = x + \varepsilon y$ est orthogonal à H. Ainsi $\sigma(x) = -\varepsilon y$ et $-\varepsilon\sigma$ prolonge s en une isométrie de V.

d) La décomposition $U = U_1 \oplus U_2$ voulue résulte immédiatement de ce que la restriction de q à U admet une base orthogonale. L'hypothèse de récurrence permet de prolonger la restriction de s à U_1 en une isométrie σ_1 de V. Il suffit alors de remplacer s par $\sigma_1^{-1} \circ s$, vu que si le théorème de Witt est vrai pour $\sigma_1^{-1} \circ s$, il est vrai pour s.

e) On a $U_2 \subset U_1^\perp$, d'où $s(U_2) \subset U_1^\perp$ vu qu'on suppose maintenant que s est l'identité sur U_1 et que s est un morphisme métrique. L'hypothèse de récurrence dit alors que la restriction de s à U_2 se prolonge en une isométrie σ_2 de $V_1 := U_1^\perp$. Il suffit alors, pour prolonger s en une isométrie de V, de prendre l'identité sur U_1 et σ_2 sur V_1.

f) C'est le cas particulier $V = V'$, $q = q'$; on choisit un isomorphisme métrique s de F sur F' (possible puisque les restrictions de q à F et F' sont équivalentes), qu'on prolonge en une isométrie u de V.

5. a) C'est une conséquence immédiate du f) de l'exercice **4.**.

b) Le a) dit immédiatement que si E est somme directe orthogonale de F et G, et aussi somme directe orthogonale de F' et G', alors si les restrictions de q à F et F' sont isomorphes, il en va de même des restrictions de q à G et G'. Si on avait par exemple $r > s$, on pourrait donc en déduire que la restriction de q à $\bigoplus_{i=s+1}^{r} H_i$ serait anisotrope (isomorphe à celle de q à F'), ce qui contredit le fait que H_{r+1} est un plan hyperbolique (donc contient un vecteur isotrope non nul). Ainsi $r = s$, et en réappliquant a) on conclut que $q_{|F}$ et $q_{|F'}$ sont isomorphes.