M2 "Géométrie algébrique", Orsay, 2007-2008

Devoir maison : Théorème de Chevalley

Dans tout le problème, quand A et B sont deux parties d'un ensemble E, on notera $A \setminus B$ l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B. Si E est un espace topologique et A une partie de E, on note $\overline{A}$ l'adhérence de A dans E; on rappelle la formule $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Partie 1.

Soit X un espace topologique. On dit qu'une partie Z de X est *localement fermée* dans X si pour tout z de Z, il existe un ouvert U de X contenant z tel que $U \cap Z$ soit un fermé de U.

1. Montrer que Z est localement fermé dans X si et seulement si Z peut s'écrire $Z = U \cap F$ avec U ouvert de X et F fermé de X.

On suppose dans toute la suite que X est un espace topologique noethérien. Une partie Z de X est dite *constructible* dans X s'il existe $m \in \mathbf{N}$ et des parties localement fermées $Z_1, ..., Z_m$ tels que $Z = \bigcup_{i=1}^m Z_i$.

2. Montrer que si Z et Z' sont constructibles dans X, alors les parties $Z \cup Z'$, $Z \setminus Z'$, et $Z \cap Z'$ le sont également.

3. Soient Z une partie constructible de X et X_0 un fermé irréductible de X.

a) Montrer qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel qu'on puisse écrire

$$X_0 \cap Z = \bigcup_{i=1}^{n} (U_i \cap F_i)$$

avec U_i ouvert de X, F_i fermé irréductible de X, et $U_i \cap F_i \neq \emptyset$.

b) Montrer que $\overline{X_0 \cap Z} = \bigcup_{i=1}^m F_i$.

c) Montrer que Z vérifie la condition

(*) *Pour tout fermé irréductible X_0 de X, la partie $X_0 \cap Z$ n'est pas dense dans X_0 ou $X_0 \cap Z$ contient un ouvert non vide de X_0.*

4. Soit Z une partie de X vérifiant (*). On se propose de montrer par l'absurde que Z est constructible. Supposons donc que ce ne soit pas le cas.

a) Montrer qu'on peut supposer que $Z \neq \emptyset$ et que Z satisfait à la propriété suivante : toute partie $Z' \subset Z$ qui vérifie (*) et telle que $Z' \neq Z$ est constructible.

b) Soient $F_1, ..., F_r$ les composantes irréductibles du fermé $\overline{Z}$. Montrer que $\overline{F_1 \cap Z} = F_1$; en déduire qu'il existe un fermé $F' \subset F_1$ avec $(F_1 \setminus F') \subset Z$ et $F_1 \neq F'$.

c) On pose $G = F' \cup F_2 \cup ... \cup F_r$. Montrer que $Z \cap G$ vérifie (*), puis que $Z \cap G$ est constructible.

d) Aboutir à une contradiction.

Partie 2.

Soit A un anneau noethérien. Soit B une A-algèbre de type fini, on note $\varphi : A \to B$ l'homomorphisme associé. On pose $X = \operatorname{Spec} B$, $Y = \operatorname{Spec} A$ et on note $f : X \to Y$ le morphisme de schémas associé.

1. On suppose φ injective et A intègre. On écrit $B = A[x_1, ..., x_r, ..., x_n]$ avec $x_1, ..., x_r$ algébriquement indépendants sur $\operatorname{Frac} A$, et tels que chaque x_j pour $r < j \leq n$ vérifie une relation polynomiale de degré $\delta_j > 0$:

$$g_j x_j^{\delta j} + ... = 0$$

à coefficients dans $A' := A[x_1, ..., x_r]$ avec $g_j \neq 0$.

a) Montrer qu'il existe un unique polynôme non nul $P \in A[X_1, ...X_r]$ tel que $P(x_1, ..., x_r) = \prod_{j=r+1}^{n} g_j$.

On choisit un coefficient non nul $a \in A$ de P.

b) Soit $\wp \in \operatorname{Spec} A$ tel que $a \notin \wp$. Montrer que l'idéal $\wp' := \wp A'$ de A' est premier et que $\prod_{j=r+1}^{n} g_j \notin \wp'$.

c) En déduire que $B_{\wp'}$ est entier sur $A'_{\wp'}$, puis que $D(a) \subset f(X)$.

2. Soit $Y_0 \subset Y$ un fermé irréductible de Y. On écrit $Y_0 = V(\wp)$ avec $\wp$ premier et on pose $A_0 = A/\wp$, $B_0 = B/\wp B$. On suppose que $Y_0 \cap f(X)$ est dense dans Y_0.

a) Montrer que l'homomorphisme $\varphi_0 : A_0 \to B_0$ induit par φ est injectif.

b) Montrer que $Y_0 \cap f(X)$ contient un ouvert non vide de X_0.

c) Montrer que $f(X)$ est constructible dans Y.

3. a) Soit X' une partie de $X = \operatorname{Spec} B$ de la forme $X' = F \cap D(b)$ avec $b \in B$ et F fermé de X. Montrer qu'il existe une B-algèbre de type fini B' telle que l'image de $\operatorname{Spec} B'$ dans X soit exactement X'.

b) Montrer que la conclusion de a) vaut encore pour toute partie constructible X' de X.

c) En déduire que si X' est une partie constructible de X, alors $f(X')$ est constructible.

Partie 3.

1. Démontrer le *théorème de Chevalley :* Soient X et Y des schémas noethériens. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de type fini. Alors pour toute partie constructible X' de X, l'image $f(X')$ est une partie constructible de Y.

2. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de type fini entre schémas noethériens avec Y irréductible. On suppose que f est dominant (i.e. $f(X)$ contient le point générique de Y). Montrer que $f(X)$ contient un ouvert non vide de Y.

Soient X un espace topologique et x, x' des points de X. On dit que x' est une *spécialisation* de x (ou encore que x est une *générisation* de x') si x' est dans l'adhérence $\overline{\{x\}}$ de x. Une partie Z de X est dite *stable par spécialisation* si elle contient toutes les spécialisations de ses points (c'est par exemple le cas si Z est fermée).

3. Montrer que si Z est une partie constructible d'un schéma noethérien X avec Z stable par spécialisation, alors Z est un fermé de X.

4. a) Soient A un anneau nothérien et B une A-algèbre de type fini. On suppose que l'homomorphisme $A \to B$ vérifie le going-down. Montrer que le morphisme associé $f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ est une application ouverte.

b) Soient X et Y des schémas noethériens et $f : X \to Y$ un morphisme plat et de type fini. Montrer que f est une application ouverte.