Université Paris Sud — Année 2009-2010

M2 — Géométrie Algébrique

TD n° I

Dans tout ce qui suit, X est un espace topologique et l'on désigne par $\mathbf{Ouv}(X)$ la catégorie dont les objets sont les ouverts de X et telle que, pour tout couple (U, V) d'ouverts de X, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ouv}(X)}(U, V)$ est un singleton si $U \subset V$ et vide sinon.

On note $\mathbf{Ens}, \mathbf{Gr}, \mathbf{Ab}, \ldots$ la catégorie des ensembles, groupes, groupes abéliens ...

Exercice A

1 .a) Vérifier que la donnée d'un préfaisceau d'ensembles (resp. de groupes,) (resp. de groupes abéliens ...) sur X équivaut à la donnée d'un foncteur contravariant de $\mathbf{Ouv}(X)$ dans $\mathbf{Ens}$ (resp. $\mathbf{Gr}$,) (resp. $\mathbf{Ab}$, ...)

b) Vérifier qu'alors la donnée d'un faisceau d'ensemble sur X équivaut à la donnée d'un foncteur contravariant F de $\mathbf{Ouv}(X)$ dans $\mathbf{Ens}$ tel que pour tout ouvert $U \subset X$ et tout recouvrement $\mathcal{U}$ de U, la suite

$$0 \to F(U) \to \prod_{V \in \mathcal{U}} F(V) \rightrightarrows \prod_{(V,W) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}} F(V \cap W)$$

est exacte.

c) Vérifier enfin que la donnée d'un morphisme de préfaisceaux équivaut à la donnée d'une transformation naturelle des foncteurs contravariants correspondants.

2 .a) Montrer qu'on peut définir un préfaisceau d'ensemble e sur X en posant que pour tout ouvert U de X, $e(U)$ est un singleton.

b) Montrer qu'alors e est un faisceau.

c) Montrer que pour tout préfaisceau (resp. faisceau) F sur X il existe un unique morphisme $F \to e$. On dit alors que e est « un » *objet final dans la catégorie des préfaisceaux (resp. faisceaux) sur* X et l'on pourrait « sans complexe » parler de l'objet final ; un tel objet étant unique à unique isomorphisme près.

3) À tout ouvert U de X on associe le foncteur contravariant encore noté U (ce qui s'avère cohérent pour peu qu'on connaisse le *lemme de Yoneda*,) défini par $U(V) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ouv}(X)}(V, U)$ pour tout ouvert V de X.

a) Montrer que pour tout ouvert U le foncteur U associé est un préfaisceau puis un faisceau.

b) Montrer que le foncteur associé à X s'identifie alors à l'objet final e dans la catégorie des préfaisceaux (resp. faisceaux) défini à la question 2.a.

c) Montrer que pour tout préfaisceau (resp. faisceau) F sur X et tout ouvert U de X, $F(U) := \Gamma(U, F)$ (l'ensemble des sections de F sur U,) s'identifie à $\mathrm{Hom}(U, F)$ l'ensemble des morphismes de préfaisceaux du faisceau associé à U dans F.

Cette manière de considérer les faisceaux permet de généraliser la notion. En effet, si on considère attentivement les choses, on remarque que l'espace topologique X ne « joue plus vraiment de rôle » mais que l'« objet significatif » est la catégorie de ses ouverts. On peut donc

toujours donner formellement la définition de préfaisceau (c'est-à-dire de foncteur contravariant) sur une catégorie quelconque et même celle de faisceau pour peu qu'on sache définir des « recouvrement » en un sens convenable.

Exercice B

Soit I un ensemble et $F_{i\ ,i\in I}$ une famille de faisceaux d'ensembles sur X. On note P le préfaisceau d'ensembles sur X défini par

$$U \ \mapsto \ P(U) \ := \ \prod_{i\in I} F_i(U) \ \forall \, U \ \in \ \mathbf{Ouv}(X) \, .$$

1) Montrer que P est un faisceau et un *produit* dans la catégorie des faisceaux d'ensembles sur X, à savoir que pour tout faisceau d'ensemble F on a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}(F, P) \ \cong \ \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(F, F_i) \, .$$

2) Si $(I, \leq)$ est un ensemble ordonné (resp. un ensemble ordonné filtrant,) et $F_{i\ ,i\in I}$ un système projectif (resp. un système projectif filtrant,) on pourrait établir un résultat analogue pour $\varprojlim_{\mathbf{I}}(F_i)$.

Exercice C

1) Soit G un préfaisceau de groupes sur X.
a) Montrer que la donnée des lois de composition des groupes $G(U)$ définit un morphisme de préfaisceaux $\mu_G \ : \ G \times G \ \to \ G$ et établir ses propriétés.

b) À quoi correspond la donnée des éléments neutres pour chaque groupe $G(U)$?

c) Comment traduira-t-on dans ce contexte le fait bien connu qu'un groupe n'est jamais vide ?

d) Comment traduira-t-on la condition G *est un préfaisceau de groupes abéliens* en termes du morphisme μ_G ?

2) Que deviennent les constructions de la question 1 dans le ca où X est un espace réduit à un point ?

3) Donner une définition équivalente de préfaisceau en groupes.

4) Sur le même modèle donner une définition de préfaisceau d'anneaux, modules, etc ...

5) Pourrait-on généraliser les résultats de l'exercice I.B aux catégories considérées ci-dessus ? Lorsqu'elles existent, a-t-on des résultats identiques/analogues pour les sommes directes ou même les limites inductives ?

Exercice D

Soit $\mathcal{O}$ un faisceau d'anneaux sur X. On dit alors que le couple $(X, \mathcal{O})$ est un *espace annelé*. Pour tout couple $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ de faisceaux de $\mathcal{O}$-modules sur X, on note

$$T \ : \ U \ \mapsto \ \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} \mathcal{G}(U) \text{ et } H \ : \ U \ \mapsto \ \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(U)}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U)) \ \forall \, U \ \in \ \mathbf{Ouv}(X) \, .$$

1) On note $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{G}$ et on appelle *produit tensoriel* de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ le faisceau associé à T. Donner une propriété universelle qui le caractérise.

2) Montrer que H est un faisceau qu'on notera $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ et que pour tout $\mathcal{O}$-module $\mathcal{H}$ on a un isomorphisme de $\mathcal{O}$-modules

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{G}, \mathcal{H}) \ \cong \ \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{G}, \mathcal{H})) \, .$$