Université Paris Sud — Année 2009-2010

M2 — Géométrie Algébrique

TD n° II

Exercice A

1) Décrire le spectre de $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{C}[X,Y]$ et $\mathbb{Q}[X]$.

2) Décrire le spectre (en tant qu'espace topologique) d'un anneau de valuation discrète, d'un anneau de Dedekind, d'un anneau principal ...

3) Pour A un anneau et $\mathfrak{I}$ comparer $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{I})$, $\mathrm{Spec}(A/\sqrt{\mathfrak{I}})$ et $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{I}^n)$.

Exercice B

1) Montrer que le spectre d'un anneau A est un espace topologique quasi-compact c'est-à-dire que de tout recouvrement ouvert on peut extraire un recouvrement fini.

2) Soit A un anneau et $X := \mathrm{Spec}(A)$.
a) Montrer que l'adhérence d'une partie $Y \subset X$ est le fermé $V(\mathfrak{I})$ où $\mathfrak{I}$ est l'idéal $\{f \in A \mid f(y) = 0\ \forall y \in Y\}$.

b) En déduire que $\mathfrak{p} \in X$ est fermé si et seulement si $\mathfrak{p}$ est maximal.

c) Montrer que si k est un corps et A une k-algèbre de type fini, l'ensemble des points fermés de $\mathrm{Spec}(A)$ est dense dans $\mathrm{Spec}(A)$. **Indication** *Utiliser le théorème des zéros de Hilbert.*
Montrer que ce résultat est faux en général en étudiant par exemple $\mathrm{Spec}(k[[T]])$.

Exercice C

1) Décrire les fermés de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[T])$.

2) Montrer qu'ils ne sont pas tous principaux.

Exercice D

1) Si X est un schéma affine, montrer qu'un ouvert principal V d'un ouvert principal U de X est principal dans X.

2) Pour X un schéma, U et V des ouverts affines de X, montrer que tout point de $U \cap V$ a un voisinage principal à la fois dans U et V.

Exercice E. −*

Soient A un anneau et X un schéma.

Montrer qu'on a une application naturelle
$\alpha : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, \mathrm{Spec}(A)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Anneaux}}(A, \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$ et qu'α est bijective.

Exercice F. −Morphismes et fonctorialités

Si X et T sont des schémas, on note $X(T)$ l'ensemble des morphismes de schémas

$$g \,:\, T \,\to\, X$$

de T dans X. Si $f \,:\, X \,\to\, Y$ est un morphisme de schémas et T est un schéma, on note

$$f(T) \,:\, X(T) \,\to\, Y(T)$$

l'application définie par $f(T)(g) \,:=\, f \circ g$.

1) Montrer que si f est un isomorphisme, alors $f(T)$ est une bijection.

2) Montrer la réciproque : si $f(T)$ est bijective pour tout schéma T, alors f est un isomorphisme.

3) On suppose que pour tous schéma *affine* T, l'application $f(T)$ est bijective. Montrer que f est un isomorphisme.

4) Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille infinie d'anneaux non nuls. On pose $X_i \,:=\, \mathrm{Spec}(A_i)$ et on note X le schéma union disjointe des X_i (on peut donc voir chaque X_i comme un ouvert de X). On pose également

$$A \,:=\, \prod_{i\in I} A_i \; et \; Y \,:=\, \mathrm{Spec}(A)\,.$$

a) Montrer qu'il existe un unique morphisme de schémas $u \,:\, X \,\to\, Y$ dont la restriction à chaque X_i est induit par la projection $A \,\to\, A_i$.

b) Montrer que u n'est pas un isomorphisme.

c) Montrer que pour tout schéma affine $T \,:=\, \mathrm{Spec}(B)$, l'application qui à un morphisme

$$g \,:\, Y \,\to\, T$$

associe le morphisme

$$g \circ u \,:\, X \,\to\, T$$

est bijective.

Exercice G

Soit k un corps. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\mathbb{A}^n_k \,:=\, \mathrm{Spec}(k[X_1, \ldots, X_n])$$

l'espace affine de dimension n.

1) Soit $U \,\subset\, \mathbb{A}^n_k$ le complémentaire de l'origine $0 \in \mathbb{A}^n_k$.

a) Montrer que pour $n > 1$ la flèche de restriction

$$\Gamma(\mathbb{A}^n_k, \mathcal{O}) \,\to\, \Gamma(U, \mathcal{O})$$

est un isomorphisme. En déduire que U n'est pas affine.

b) Qu'en est-il si k est un anneau quelconque ? si $n = 1$?

2) Montrer que la courbe $xy = 1$ dans $\mathbb{A}^2_k$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{A}^1_k$.

3) Soit

$$Y \,:=\, \{(t, t^2, t^3)\} \,\subset\, \mathbb{A}^3_k\,.$$

a) Montrer que Y est un ensemble algebrique dans $\mathbb{A}^3_k$.

b) Trouver des générateurs de l'idéal de $k[x, y, z]$ définissant Y.

c) Montrer que

$$Y \cong \mathbb{A}^1_k .$$

4) Soit $Y \subset \mathbb{A}^3_k$ le schéma donné par les équations

$$x^2 - yz = 0 \text{ et } xz - x = 0 .$$

a) Montrer que Y admet trois composantes irréductibles, trouver les idéaux premiers correspondants de $\mathcal{O}_Y$.

b) Montrer que Y est connexe.

Exercice H

1) Soit A un anneau, $X := \mathrm{Spec}(A)$ et $f \in A$.
Montrer que f est nilpotent si et seulement si $D(f)$ est vide.

2) Soit $\phi : A \to B$ un morphisme d'anneaux et

$$f := \mathrm{Spec}(\phi) : Y := \mathrm{Spec}(B) \to X := \mathrm{Spec}(A)$$

le morphisme induit sur les schémas affines.
a) Montrer que ϕ est injectif si et seulement si le morphisme de faisceaux $f^\# : \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$ est injectif.

b) Montrer que dans ce cas, f est *dominant* c'est-à-dire que $f(Y)$ est dense dans X.

3) Avec les mêmes notations que précédemment, montrer que si ϕ est surjectif, f est un homéomorphisme de Y dans un fermé de X et $f^\# : \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$ est surjectif.

4) Prouver la réciproque de la question précédente à savoir si $f : Y \to X$ est un homomorphisme sur un fermé, et $f^\# : \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$ est surjectif, alors ϕ est surjectif.

Exercice I

Soit B un anneau gradué. Soit f un élément homogène de degré zéro de B, qu'on suppose non nilpotent.

1) Montrer que B_f a une graduation naturelle.

2) Montrer que $D_+(f)$ est alors isomorphe à $\mathrm{Proj}(B_f)$.

Exercice J

Soit k un corps.

1) Montrer que pour toute extension L de k, l'ensemble des L-points de $\mathbb{A}^n_k$ s'identifie à L^n.

2) Énoncer et démontrer un résultat analogue pour $\mathbb{P}^n_k$.

Exercice K

Soit B un anneau gradué noethérien.

1) Montrer que pour tout élément homogène f de B_+, l'anneau $B_{(f)}$ est noethérien.

2) Le schéma $\mathrm{Proj}(B)$ est-il quasi-compact ?

Exercice L

1) Soit S un anneau gradué.
Montrer que $\mathrm{Proj}(S) = \emptyset$ si et seulement si tout élément de S_+ est nilpotent.

2) Soit $\phi : S \to T$ un morphisme gradué entre anneaux gradués (préservant le degré.) Soit

$$U := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(T) \mid \phi(S_+) \not\subset \mathfrak{p}\} .$$

a) Montrer que U est un ouvert de $\mathrm{Proj}(T)$.

b) Montrer que ϕ détermine un morphisme naturel $f : U \to \mathrm{Proj}(S)$.

3) Supposons que le morphisme $\phi_d : S_d \to T_d$ est un isomorphisme pour tout $d \geq d_0$ où d_0 est un entier.
a) Montrer qu'alors $U = \mathrm{Proj}(T)$ et qu'alors le morphisme $f : \mathrm{Proj}(T) \to \mathrm{Proj}(S)$ est un isomorphisme.

b) En déduire que f peut être un isomorphisme même si ϕ n'en est pas un.