Université Paris Sud — Année 2009-2010

M2 — Géométrie Algébrique

TD n° IV

Exercice A

Soient S un schéma, X un S-schéma réduit et Y un S-schéma séparé. Soient $f, g : X \to Y$ deux morphismes de S-schémas, qui coïncident sur un ouvert dense $U \subset X$. Montrer que $f = g$.

Exercice B

Soient k un corps algébriquement clos, X et Y des k-variétés avec X réduite.

Montrer que, deux morphismes de k-variétés $f, g : X \to Y$ tels que les morphismes induits sur les k-points sont égaux, sont égaux.

Exercice C

Montrer qu'une courbe propre est projective.

Exercice D

Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre entre schémas.

1) Montrer que si Y et toutes les fibres X_y de f sont connexes, alors X est connexe.

2) La conclusion de la question précédente reste-elle valable en remplaçant partout "connexe" par "intègre" ?

Exercice E

On dira qu'un morphisme de schémas $f : X \to Y$ est *constant* si on a $f(x) = f(y)$ pour tous points x, y de X.

1) Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas avec X intègre. On suppose que pour tout ouvert affine U de X, le morphisme $f_{|U} : U \to Y$ (obtenu par restriction de f à U) est constant.

Montrer que f est constant.

2) Soient $Y := \mathrm{Spec}(A)$ un schéma affine et $f : X \to Y$ un morphisme.

Montrer que pour tout ouvert affine $U := \mathrm{Spec}(B)$ de X, l'homomorphisme $A \to B$ induit par la restriction $f_{|U} : U \to Y$ est à valeurs dans le sous-anneau $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ de B.

3) Soit X un schéma projectif et géométriquement intègre sur un corps k. Soit Y un schéma affine, de type fini sur k.

Montrer que tout k-morphisme $f : X \to Y$ est constant.

4) Soient X, Y, Z des variétés sur un corps algébriquement clos k. On suppose X et Y intègres et X projectif sur k. Soit $f : X \times_k Y \to Z$ un k-morphisme vérifiant : *il existe* $y_0 \in Y(k)$ *tel que le morphisme de* X *dans* Z *défini par* $x \mapsto f(x, y_0)$ *soit constant d'image* $z_0 \in Z(k)$.

a) Soit V un ouvert affine de Z contenant z_0. On pose $F := Z - V$. Montrer que $p_2(f^{-1}(F))$ est un fermé strict de Y, où $p_2 : X \times_k Y \to Y$ est la projection.

b) En déduire qu'il existe un ouvert non vide U de Y tel que pour tout y de $U(k)$, le morphisme de X dans Z défini par $x \mapsto f(x, y)$ soit constant.

c) Montrer que les morphismes $(x, y) \mapsto f(x_0, y)$ et f coïncident sur $X \times_k U$. En déduire qu'il existe un k-morphisme $g : Y \to Z$ tel que $f = g \circ p_2$.

Exercice F

Si A est un anneau de Dedekind, montrer que tout ouvert de $\mathrm{Spec}(A)$ est affine.

Exercice G. −Variétés "retract-rationnelles"

1) Soit A un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}_A$. Soit x le point fermé de $\mathrm{Spec}(A)$ (correspondant à $\mathfrak{m}_A$.)

Montrer que si y est un point de $\mathrm{Spec}(A)$, alors x appartient à l'adhérence $\overline{\{y\}}$ de y.

2) Soit k un corps et A une k-algèbre locale (c'est-à-dire que A est local quand on le considère juste comme un anneau) dont on note $\mathfrak{m}_A$ l'idéal maximal et L le corps résiduel. Pour tout k-schéma X, on note

$$\varphi_{X,A} : X(A) \to X(L)$$

l'application de *réduction modulo* $\mathfrak{m}_A$. Plus précisément, si

$$u \in X(A) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}(k)}(\mathrm{Spec}(A), X)$$

est un A-point, son image par $\varphi_{X,A}$ est le L-point de X défini par le k-morphisme

$$u \circ \pi : \mathrm{Spec}(L) \to X,$$

où

$$\pi : \mathrm{Spec}(L) \to \mathrm{Spec}(A)$$

est le k-morphisme induit par la surjection canonique $A \to L$.

a) Montrer que si X est l'espace affine $\mathbb{A}^n_k$, on a $X(A) = A^n$.

b) Soient X un k-schéma et U un ouvert non vide de X. Montrer que si $\varphi_{X,A}$ est surjective, alors $\varphi_{U,A}$ est surjective (on pourra utiliser 1.

c) Soit U une k-variété intègre. On suppose que la condition suivante est vérifiée :

(*) Il existe un entier n, un ouvert non vide Y de l'espace affine $\mathbb{A}^n_k$, et des k-morphismes $f : U \to Y$ et $g : Y \to U$ tels que $g \circ f$ soit le morphisme identité Id_U de U.

Montrer qu'alors $\varphi_{U,A}$ est surjective.

On dira qu'une k-variété intègre X est *retract-rationnelle* (notion due à D. Saltman) s'il existe un ouvert non vide U de X satisfaisant (*).

3) Soit X une k-variété intègre. On suppose qu'il existe un ouvert non vide V de X tel que pour toute k-algèbre locale A, l'application $\varphi_{V,A} : V(A) \to V(L)$ (où L est le corps résiduel de A) soit surjective. On se propose de montrer que X est retract-rationnelle.

a) Montrer qu'on peut supposer pour cela que $V = X$, et que $X := \mathrm{Spec}(B)$, où B s'écrit $B := R/\mathfrak{p}$ avec $R := k[T_1, \ldots, T_n]$ et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de R.

b) On pose $A := R_{\mathfrak{p}}$; on note $L := \mathrm{Frac}(B)$ le corps des fonctions de X, qui est aussi le corps résiduel de A.

Montrer qu'il existe un ouvert affine non vide W de $\mathbb{A}^n_k$ et des k-morphismes

$$g : \mathrm{Spec}(L) \to W$$

et $h : W \to X$ dont le composé $h \circ g : \mathrm{Spec}(L) \to X$ est le morphisme canonique (associé à l'inclusion $B \subset L$.)

c) En déduire qu'il existe un ouvert non vide U de X et un k-morphisme $f : U \to W$ tels que $h \circ f$ soit l'immersion ouverte $U \subset X$.

d) Conclure.

Exercice H

Montrer que le schéma défini par $x^2 - yz$ est normal mais singulier.

Exercice I

Étant donnée une variété X sur un corps algébriquement clos k, montrer que le lieu régulier de X est ouvert dans X.

Exercice J

Soit X un schéma intègre de type fini sur un corps k. Montrer que le normalisé de X (et plus généralement le normalisé de X dans toute extension finie du corps des fonctions) est fini sur X.

Exercice K

1) Soient A un anneau noethérien intègre et $A \hookrightarrow B$ une A-algèbre intègre de type fini. Montrer qu'il existe $f \in A$, tel que $f^{-1}B$ est plat sur $f^{-1}A$. **Indication** *On pourra raisonner par récurrence sur la dimension de la fibre générique.*

2) Soit $f : X \to S$ un morphisme de type fini et dominant entre schémas localement noethériens. Su pposons de plus S réduit. Alors il existe un ouvert $U \subset S$ dense tel que f soit plat sur $f^{-1}(U)$ et en particulier équidimensionnel.

Exercice L

Soit $f : X \to Y$ un morphisme dominant entre schémas intègres de type fini sur un corps k.

1) Soit Y' un fermé irréductible de Y de point générique η' contenu dans $f(X)$ et Z une composante irréductible quelconque de $f^{-1}(Y')$ telle que $\eta' \in f(Z)$. Montrer que $\mathrm{codim}(Z, X) \leq \mathrm{codim}(Y', Y)$.

2) Soit $e = \dim X - \dim Y$, la *dimension relative* de X sur Y. Pour tout $y \in f(X)$, montrer que toute composante irréductible de la fibre X_y, est de dimension $\geq e$.

3) Montrer qu'il existe un ouvert dense $U \subset X$ tel que pour tout $y \in f(U)$, $\dim U_y = e$.

4) Pour tout entier h soit E_h l'ensemble des points $x \in X$ tels qu'il existe une composante irréductible Z de $X_{f(x)}$ contenant x avec $\dim Z \geq h$.

Montrer que :

a)

$$E_e = X ;$$

b) si $h > e$, E_h n'est pas dense dans X ;

c) pour tout h E_h est fermé.