Corrigé de l'examen de mathématiques générales, M1

Exercice 1 : Groupes abéliens divisibles (4 points)

a) Si K est de caractéristique zéro, alors pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$ l'élément $n.1 \in K$ possède un inverse (noté $1/n$), ce qui implique que tout $x \in K$ s'écrit $x = ny$ avec $y = (1/n).x$. Réciproquement, si K est de caractéristique $p > 0$, on a $py = 0$ pour tout $y \in K$, donc 1 ne s'écrit pas sous la forme py. Finalement, la condition cherchée est que K est de caractéristique zéro (1 point).

b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $\bar{x} \in A/B$ avec $x \in A$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Comme A est divisible, on peut écrire $x = ny$ avec $y \in A$, d'où $\bar{x} = n\bar{y}$ avec $\bar{y} \in A/B$. Ainsi, A/B est divisible (0.5 point).

c) Non : par exemple $\mathbf{Q}$ (muni de l'addition) est divisible, mais son sous-groupe $\mathbf{Z}$ ne l'est pas car la multiplication par 2 dans $\mathbf{Z}$ n'est pas surjective (1 point).

d) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $x \in I$. Prenons $A = \mathbf{Z}$ et $B = n\mathbf{Z}$. On définit alors un morphisme f de B dans I en posant $f(nt) = tx$ pour tout t de $\mathbf{Z}$ (en particulier $f(n) = x$). Par hypothèse, ce morphisme se prolonge en un morphisme $g : \mathbf{Z} \to I$. Alors

$$x = f(n) = g(n) = g(n.1) = ng(1),$$

ce qui montre que $x = ny$ avec $y = g(1)$. Ainsi I est divisible (1.5 point). En fait, un groupe divisible est aussi injectif (plus difficile, utilise le lemme de Zorn).

Exercice 2 : Opération de groupe (4 points)

a) Soit $h \in \ker \Phi$. On a en particulier $h(1.H) = 1.H$, i.e. $hH = H$, ce qui montre que $h \in H$ puisque par exemple $h.1 \in H$ (0.5 point).

b) On sait que $\ker \Phi$ est un sous-groupe distingué de $G = \mathcal{S}_n$, il est donc trivial ou bien contient $\mathcal{A}_n$ d'après le corollaire 3.3. du cours. Mais d'après a), $\ker \Phi$ est inclus dans H, qui est de cardinal $n!/n = (n-1)!$, tandis que

$\mathcal{A}_n$ est de cardinal $n!/2 > (n-1)!$ (en effet $n > 2$). Ainsi $\ker \Phi$ est trivial et Φ est injective. Comme G et $\mathcal{S}(E)$ ont tous deux pour cardinal $n!$ (en effet E est de cardinal n vu que H est d'indice n dans G), on obtient que Φ est un isomorphisme (1.5 point).

c) Le stabilisateur Stab_H de $\bar{1} = H$ est l'ensemble des g de G tels que $gH = H$, d'où $\mathrm{Stab}_H = H$. On en déduit que $\Phi(H)$ est le stabilisateur de l'élément $\bar{1}$ pour l'opération naturelle du groupe $\mathcal{S}(E)$ sur E. Comme E est un ensemble à n éléments, ce stabilisateur est isomorphe à $\mathcal{S}_{n-1}$, et comme Φ est un isomorphisme, H est également isomorphe à $\mathcal{S}_{n-1}$ (2 points).

Exercice 3 : Anneaux normaux (5 points)

a) Si $x \in A$, il annule le polynôme $X - x$, donc est entier sur A (0.5 point).

b) Comme 2 et $1 + i\sqrt{3}$ sont par définition dans A, leur quotient ω est dans $\mathrm{Frac}\, A$. On observe que $(1 + i\sqrt{3})^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$, d'où $\omega^2 = -1 + \omega$. Ainsi ω annule le polynôme $X^2 - X + 1$, il est donc entier sur A (on peut aussi observer que ω est l'opposé d'une racine cubique de 1, donc il annule $X^3 + 1$). Comme on a clairement $\omega \notin A$, l'anneau A n'est pas normal (1.5 point).

c) On peut écrire $x = a'/b'$ avec a' et b' dans A. On peut supposer $x \neq 0$ (sinon on écrit $0 = 0/1$). Soit d un pgcd de a' et b' dans A (qui existe car A est factoriel), posons $a = a'/d$ et $b = b'/d$. Alos a et b sont des éléments de A premiers entre eux, avec $x = a/b$ (1 point).

d) Soit x un élément e $\mathrm{Frac}\, A$ qui annule un polynôme unitaire

$$P = X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + ... + \alpha_0$$

de $A[X]$, il s'agit de montrer que $x \in A$. On peut supposer $x \neq 0$, écrivons $x = a/b$ avec a et b éléments non nuls de A premiers entre eux. Comme $P(x) = 0$, on a, en multipliant par b^n :

$$a^n + b\alpha_{n-1}a^{n-1} + ... + b^{n-1}\alpha_1 a + b^n\alpha_0 = 0.$$

Ainsi, b divise a^n. Comme il est premier avec a, ce n'est possible (via le lemme de Gauss) que si b est inversible dans A, ce qui signifie que $x \in A$ (2 points).

Exercice 4 (7 points)

a) Soit $\wp$ un idéal premier de A contenant I et J, alors il est stable par addition, donc contient $I + J$, ce qui montre que $V(I) \cap V(J) \subset V(I + J)$. Réciproquement, si $\wp$ contient $I+J$, il contient a fortiori I et J, ce qui montre l'inclusion inverse (1 point).

b) Si maintenant $\wp$ contient I ou J, il contient $I \cap J$. D'autre part, $I \cap J$ contient clairement IJ, ce qui donne

$$V(I) \cup V(J) \subset V(I \cap J) \subset V(IJ).$$

Supposons alors que $\wp$ contient IJ et montrons qu'il contient I ou J (ce qui donnera $V(IJ) \subset V(I) \cup V(J)$). Si ce n'était pas le cas, on aurait $x \in I$ et $y \in J$ tels que x et y ne soient pas dans $\wp$. Mais alors $xy \in IJ$ par définition de IJ, d'où $xy \in \wp$, ce qui contredit le fait que $\wp$ est premier (1.5 point).

c) Soit $J = \sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ l'idéal engendré par la réunion des I_λ, qui est aussi l'ensemble des sommes $\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda$ avec $x_\lambda \in I_\lambda$ et la famille des x_λ presque nulle. Soit $\wp$ un idéal premier de A, alors $\wp$ contient tous les I_λ si et seulement s'il contient l'idéal J qu'ils engendrent, ce qui donne

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(I_\lambda) = V(J).$$

(1.5 point).

d) On a $\operatorname{Spec} A = \emptyset$ si et seulement si A n'a pas d'idéaux premiers. C'est bien le cas si $A = \{0\}$. Réciproquement, si A est non nul, alors il contient un idéal maximal (en particulier premier) par le théorème de Krull, d'où $\operatorname{Spec} A \neq \emptyset$ (1 point).

e) Les singletons autre que l'idéal nul sont bien de la forme $V(I)$, car si $\wp$ est un idéal premier non nul de A, il est maximal vu que A est principal, d'où $\wp = V(\{\wp\})$ (le seul idéal autre que $\wp$ qui contient $\wp$ est A). D'après b), les réunions finies de tels singletons sont encore de la forme $V(I)$, et aussi $\emptyset = V(A)$ car l'idéal A (le seul qui contient A) n'est pas premier (1 point).

f) On a déjà vu que $\emptyset = V(A)$ et on a clairement $\operatorname{Spec} A = V(\{0\})$. Soit maintenant I un idéal de A autre que $\{0\}$ et A, alors (comme $\mathbf{C}[X]$ est principal) il est engendré par un polynôme unitaire P de degré au moins 1. On peut écrire $P = (X - a_1)...(X - a_n)$ avec $a_1, ..., a_n \in \mathbf{C}$ (pas forcément deux à deux distincts) car $\mathbf{C}$ est algébriquement clos. Alors $V(I)$ est constitué des idéaux premiers $\wp$ qui contiennent P. Un tel idéal premier est de la forme $(X - a)$ (en effet on sait qu'il est engendré par un polynôme irréductible unitaire de $\mathbf{C}[X]$). La condition $P \in \wp$ est alors équivalente au fait que $(X - a)$ divise P, c'est-à-dire que a soit l'un des a_i. Finalement $V(I)$ est l'ensemble des $(X - a_i)$, qui est bien fini et ne contient pas l'idéal nul (2 points).