Examen de mathématiques générales, M1 (3h)

D. Harari, K. Destagnol

19 décembre 2024

Tout énoncé vu en cours (mais pas s'il a été vu seulement en TD) peut être utilisé sans démonstration. On peut dans chaque exercice admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure.

Le symbole (*) désigne une question a priori plus difficile.

Exercice 1 : Groupes abéliens divisibles (4 points)

On dit qu'un groupe abélien $(A, +)$ est *divisible* si pour tout $x \in A$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe $y \in A$ tel que $x = ny$.

a) Soit K un corps. À quelle condition le groupe $(K, +)$ est-il divisible ?

b) Montrer que si A est un groupe divisible et B est un sous-groupe de A, alors A/B est divisible.

c) Un sous-groupe d'un groupe divisible est-il toujours divisible ?

d) (*) On dit qu'un groupe abélien I est *injectif* si pour tout groupe abélien A, tout sous-groupe B de A, et tout morphisme $f : B \to I$, il existe un morphisme $g : A \to I$ tel que la restriction de g à B soit f. Montrer que si I est injectif, alors I est divisible (on pourra considérer le cas où $A = \mathbf{Z}$).

Exercice 2 : Opération de groupe (4 points)

Soit n un entier au moins égal à 5. On pose $G = \mathcal{S}_n$ et on considère un sous-groupe H de G d'indice n. On considère l'opération de G sur l'ensemble $E = G/H$ des classes à gauche suivant H, donnée par : $g.(aH) = (ga).H$ pour tous $g, a \in G$. On note $\Phi : G \to \mathcal{S}(E)$ le morphisme associé à cette opération, c'est-à-dire que pour tout $g \in G$, $\Phi(g)$ est la permutation $x \mapsto g.x$ de E.

a) Montrer que $\ker \Phi \subset H$.

b) En déduire que Φ est un isomorphisme de G sur $\mathcal{S}(E)$ (on pourra commencer par rappeler les sous-groupes distingués de G).

c) (*) En considérant le stabilisateur de l'élément $\bar{1} = H$ de E, montrer que H est isomorphe à $\mathcal{S}_{n-1}$.

Exercice 3 : Anneaux normaux (5 points)

Soit A un anneau intègre de corps des fractions K. On dit qu'un élément x de K est *entier sur* A s'il existe un polynôme unitaire $P \in A[X]$ tel que $P(x) = 0$.

a) Montrer que tout $x \in A$ est entier sur A.

On dit que A est *normal* si tout élément de K qui est entier sur A appartient à A.

b) Soit $B = \mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$ le sous-anneau de $\mathbf{C}$ constitué des $a + bi\sqrt{3}$ avec $a, b \in \mathbf{Z}$. Montrer que $\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \in \operatorname{Frac} B$, et en déduire que B n'est pas normal (on pourra chercher un polynôme de degré 2 ou 3 de $\mathbf{Z}[X]$ qui annule $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$).

On suppose dans toute la suite de cet exercice que A est un anneau factoriel.

c) Montrer que tout élément x de $K = \operatorname{Frac} A$ peut s'écrire $x = \frac{a}{b}$, où a et b sont des éléments de A qui sont premiers entre eux.

(*) d) Démontrer que A est un anneau normal.

Exercice 4 : Idéaux premiers d'un anneau (8 points)

Soit A un anneau commutatif. Pour tout idéal I de A, on note $V(I)$ l'ensemble des idéaux premiers de A qui contiennent I. Soient I et J des idéaux de A, on note $I + J$ l'idéal de A constitué des $x + y$ avec $x \in I, y \in J$ et IJ l'idéal de A engendré par les xy avec $x \in I, y \in J$.

a) Montrer que $V(I) \cap V(J) = V(I + J)$.

b) Montrer que $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J) = V(IJ)$ (on pourra établir d'abord que $V(I) \cup V(J) \subset V(I \cap J) \subset V(IJ)$, puis comparer $V(IJ)$ et $V(I) \cup V(J)$).

c) Montrer que si $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille quelconque d'idéaux de A, alors l'intersection $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(I_\lambda)$ est encore de la forme $V(J)$, où J est un idéal de A.

d) On note $\operatorname{Spec} A$ l'ensemble de tous les idéaux premiers de A. Montrer que $\operatorname{Spec} A = \emptyset$ si et seulement si $A = \{0\}$.

e) On prend $A = \mathbf{C}[T]$. Montrer que les sous-ensembles finis de $\operatorname{Spec} A$ qui ne contiennent pas l'idéal nul sont de la forme $V(I)$ avec I idéal de A (on pourra commencer par le cas des sous-ensembles de cardinal 1).

f) (*) Démontrer réciproquement que pour $A = \mathbf{C}[T]$, les sous-ensembles de $\operatorname{Spec} A$ qui s'écrivent sous la forme $V(I)$ sont : $\emptyset$, $\operatorname{Spec} A$, et les sous-ensembles finis de $\operatorname{Spec} A$ qui ne contiennent pas l'idéal nul.