# Corrigé du partiel de mathématiques générales

**Exercice 1 : Vrai ou faux ? (6 points)**

a) C'est faux (le problème étant que $G$ n'est pas commutatif). Par exemple $\mathcal{S}_3$ a des transpositions (d'ordre 2) et des 3-cycles (d'ordre 3), mais pas d'élément d'ordre 6 (1.5 point).

b) C'est vrai : le troisième théorème de factorisation dit en effet que $G/N$ est isomorphe à un quotient de $G/H$, ce qui est équivalent (via la surjection canonique associée à ce quotient) au fait qu'il y a un morphisme surjectif du groupe $G/H$ dans le groupe $G/N$ (1.5 point).

c) C'est vrai. Soient $x \in \varphi(N)$ et $g \in G$. Il existe alors $n \in N$ tel que $x = \varphi(n)$, d'où en posant $h = \varphi^{-1}(g)$ (soit $g = \varphi(h)$) :

$$gxg^{-1} = \varphi(h)\varphi(n)\varphi(h^{-1}) = \varphi(hnh^{-1}).$$

Or $hnh^{-1} \in N$ vu que $N$ est distingué dans $G$. Finalement $gxg^{-1} \in \varphi(N)$ comme on voulait (1.5 point).

d) C'est faux. Il suffit pour cela de prendre pour $G$ un $p$-groupe non abélien (vu qu'alors l'unique $p$-Sylow est $G$ lui-même), par exemple le $p$-Sylow de $GL_n(\mathbf{F}_p)$ si $n \geq 3$, ou encore le groupe diédral d'ordre 8 (1.5 point).

**Exercice 2 : Groupe produit (5 points)**

a) On note que $z = (z_1, z_2)$ commute avec $(x_1, x_2)$ si et seulement si $z_1x_1 = x_1z_1$ et $z_2x_2 = x_2z_2$. Ainsi $z$ est dans le centre si et seulement si $z_1$ (resp. $z_2$) commute avec tout élément de $G_1$ (resp. $G_2$), c'est-à-dire ssi $z_1 \in Z_1$ et $z_2 \in Z_2$, d'où le résultat (1 point).

b) Les commutateurs de $G$ sont les éléments de la forme $[(x_1, x_2), (y_1, y_2)]$. Or

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1], [x_2, y_2]),$$

donc les commutateurs de $G$ sont les éléments de la forme $(c_1, c_2)$, où $c_1$ (resp. $c_2$) est un commutateur de $G_1$ (resp. $G_2$). Le sous-groupe $D(G)$ est donc constitué des $(d_1, d_2)$, où $d_1$ (resp $d_2$) est un produit de commutateurs de $G_1$ (resp. de $G_2$), d'où le résultat (1 point).

c) On voit tout de suite que $\{1\} \times G_2$ est un sous-groupe distingué de $G$, or ce n'est ni $G$ (vu que $G_1$ n'est pas trivial) ni le groupe trivial (sinon $G_2$ serait aussi trivial) (1.5 point).

d) Partons d'un groupe simple non abélien, par exemple $G_1 = G_2 := \mathcal{A}_5$. Soit $G = G_1 \times G_2$, d'après c) ce groupe n'est pas simple. Comme $\mathcal{A}_5$ est simple non abélien, il est égal à son sous-groupe dérivé, et on sait également que son centre est trivial. On conclut avec a) et b) (1.5 point).

**Exercice 3 : Sous-groupe dérivé et quotient (4 points)**

a) Si $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ est un commutateur dans $G$, alors

$$f([x, y]) = f(x)f(y)f(x)^{-1}f(y)^{-1} = [f(x), f(y)]$$

est un commutateur dans $G'$. Du coup, $f(D(G))$ est un produit de commutateurs, donc est inclus dans $D(G')$ (1 point).

b) D'après a), on a déjà $\pi(D(G)) \subset D(G/N)$. Si maintenant $[\bar{x}, \bar{y}]$ est un commutateur dans $G/N$, on a $[\bar{x}, \bar{y}] = \pi([x, y])$ donc $\pi(D(G))$ contient tous les commutateurs dans $G/N$, donc contient $D(G/N)$ vu que $\pi(D(G))$ est un sous-groupe de $G/N$ (1 point).

c) Si $G$ est de cardinal $p$, il est cyclique (donc abélien) et le résultat est clair. Supposons le résultat vrai pour un groupe de cardinal $p^{n-1}$ et montrons le pour un $p$-groupe de cardinal $p^n$, où $n \geq 2$. Si $G$ est abélien, son sous-groupe dérivé est trivial et le résultat est clair. Sinon, on sait que le centre $Z$ de $G$ (qui est distingué dans $G$) est non trivial (et donc strictement inclus dans $G$). On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence au $p$-groupe $G/Z$, ce qui donne $D(G/Z) \neq G/Z$. Si on avait $D(G) = G$, en appliquant b) on obtiendrait, en notant $\pi$ la surjection canonique $G \to G/Z$ :

$$D(G/N) = \pi(D(G)) = \pi(G) = G/N,$$

d'où une contradiction (2 points).

**Exercice 4 : Sous-groupes transitifs de $\mathcal{S}_n$ (5 points)**

a) L'hypothèse donne qu'il y a une seule orbite pour l'action de $H$ sur $E$, qui est donc de cardinal $n$. Or on sait que le cardinal de toute orbite divise le cardinal du groupe qui opère, donc le cardinal de $H$ est divisible par $n$ (1 point).

b) Pour $n = 2$, le groupe $\mathcal{A}_2$ est trivial et il est clair qu'il n'est du coup pas transitif. Si $n \geq 3$, le groupe $\mathcal{A}_n$ contient tous les 3-cycles. Si alors $a, b$ sont dans $E$, on peut choisir $c$ dans $E$ distinct de $a$ et $b$, et le 3-cycle $(a, b, c)$ envoie alors $a$ sur $b$ avec $(a, b, c) \in \mathcal{A}_n$ (1 point).

c) Par hypothèse, $H$ est engendré par une permutation $\sigma$ d'ordre $d$. Si $\sigma$ n'est pas un cycle, alors en la décomposant en cycles à supports disjoints on voit que $H$ ne peut pas être transitif (si $a$ et $b$ sont dans le support de deux cycles différents de la décomposition, aucun élément de $H$ ne peut envoyer $a$ sur $b$), donc $\sigma$ doit forcément être un $n$-cycle (et réciproquement dans ce cas $H$ est clairemen transitif). Ainsi $H$ transitif implique $d = n$ et réciproquement si $H$ est engendré par un cycle de longueur $n$, il est clairement transitif (1 point).

d) Si $H$ contient un $p$-cycle, il est clairement transitif. Supposons récproquement $H$ transitif. Alors son cardinal est divisible par $p$ d'après a). Comme $p$ est premier, les $p$-Sylow de $\mathcal{S}_p$ sont de cardinal $p$ vu que $p! = p(p-1)...1$ n'est pas divisible par $p^2$. Ainsi, $H$ contient un $p$-Sylow $S$. Comme les $p$-Sylow sont conjugués, $H$ contient un conjugué du $p$-cycle $(1, ..., p)$ (qui engendre un $p$-Sylow), donc $H$ contient un $p$-cycle (2 points).