Partiel de mathématiques générales, M1 (3h)

D. Harari, K. Destagnol

23 octobre 2025

Tout énoncé vu en cours (mais pas s'il a été vu seulement en TD) peut être utilisé sans démonstration. On peut dans chaque exercice admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure.

Le symbole (*) désigne une question a priori plus difficile.

Pour tout groupe G, on note $D(G)$ son sous-groupe dérivé. On rappelle que si un groupe G opère sur un ensemble E, on dit que l'opération est *transitive* si pour tous $x, y \in E$, il existe $g \in G$ tel que $g.x = y$.

Exercice 1 : Vrai ou faux ? (6 points)

Parmi les énoncés suivants, démontrer ceux qui sont vrais et donner un contre-exemple (en justifiant) pour ceux qui sont faux (on indiquera d'abord si l'énoncé est vrai ou faux).

a) Soit G un groupe fini. Si G possède un élément d'ordre 2 et un élément d'ordre 3, alors il possède un élément d'ordre 6.

b) Soient G un groupe. Soient H et N des sous-groupes disingués de G avec $H \subset N$. Alors, il existe un morphisme surjectif du groupe G/H dans le groupe G/N.

c) Soit φ un automorphisme d'un groupe G. Si $N \lhd G$, alors $\varphi(N) \lhd G$.

(*) d) Soit G un groupe fini. Si, pour tout p premier, G possède un unique p-Sylow, alors G est abélien.

Exercice 2 : Groupe produit (5 points)

Soient G_1 et G_2 deux groupes (notés multiplicativement). On note G le groupe produit $G_1 \times G_2$, dont la loi est définie par

$$(g_1, g_2)(h_1, h_2) = (g_1 h_1, g_2 h_2)$$

pour tous g_1, h_1 de G_1 et tous g_2, h_2 de G_2. Soient Z_1, Z_2 les centres respectifs de G_1, G_2.

a) Montrer que le centre Z de G est le sous-groupe $Z_1 \times Z_2$ constitué des (z_1, z_2) avec $z_1 \in Z_1$ et $z_2 \in Z_2$.

b) Montrer que $D(G)$ est le sous-groupe $D(G_1) \times D(G_2)$ constitué des (g_1, g_2) avec $g_1 \in D(G_1)$ et $g_2 \in D(G_2)$.

c) On suppose que ni G_1 ni G_2 n'est le groupe trivial. Montrer que G n'est pas un groupe simple.

d) En déduire un exemple de groupe G tel que $D(G) = G$, dont le centre est trivial, mais qui n'est pas simple.

Exercice 3 : Sous-groupe dérivé et quotient (4 points)

a) Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes. Montrer qu'on a l'inclusion $f(D(G)) \subset D(G')$.

b) Soit N un sous-groupe distingué de G, on note $\pi : G \to G/N$ la surjection canonique. Montrer que $\pi(D(G)) = D(G/N)$.

(*) c) Soient p un nombre premier et G un p-groupe non trivial. Montrer que $D(G) \neq G$ (on pourra procéder par récurrence sur le cardinal de G).

Exercice 4 : Sous-groupes transitifs de $\mathcal{S}_n$ (5 points)

Soit $E = \{1, ..., n\}$ avec $n \geq 2$. On dit qu'un sous-groupe H de $\mathcal{S}_n$ est *transitif* si l'opération naturelle de H sur E (définie par $\sigma.x = \sigma(x)$ pour tout $\sigma \in H$, $x \in E$) est transitive.

a) Montrer que si H est transitif, alors le cardinal de H est divisible par n.

b) Montrer que $\mathcal{A}_n$ est transitif si et seulement si $n \geq 3$.

c) On suppose que H est cyclique d'ordre d. Pour quelles valeurs de d a-t-on que H est transitif ?

(*) d) Soit p un nombre premier. Montrer qu'un sous-groupe H de $\mathcal{S}_p$ est transitif si et seulement si H contient un p-cycle (on pourra considérer les p-Sylow de $\mathcal{S}_p$).