Corrigé de l'examen de M2

Exercice 1 (7 points)

a) Comme A est divisible, on a une suite exacte de G-modules

$$0 \to A[n] \to A \xrightarrow{.n} A \to 0.$$

La suite exacte longue de cohomologie donne alors une suite exacte

$$... \to H^{i-1}(G,A) \xrightarrow{.n} H^{i-1}(G,A) \to H^i(G,A[n]) \to H^i(G,A) \xrightarrow{.n} H^i(G,A),$$

ce qui fournit la suite exacte voulue (1 point).

b) Comme $A[n]$ est de torsion et $\mathrm{cd}(k) \leq 1$, on a $H^i(G,A[n]) = 0$ pour $i \geq 2$. Pour $i = 2$, a) donne alors que $H^1(G,A)/n = 0$ pour tout n, i.e. $H^1(G,A)$ est divisible. Pour $i \geq 2$, a) donne $H^i(G,A)[n] = 0$, et comme on sait que $H^i(G,A)$ est un groupe de torsion, on obtient $H^i(G,A) = 0$ pour tout $i \geq 2$ (1 point).

c) Soit L une extension finie de k comme dans l'énoncé. Quitte à remplacer L par sa clôture galoisienne sur k, on peut supposer L/k galoisienne (et $L \subset \bar{k}$ via le choix d'une clôture algébrique de k). On note déjà que $A = T(\bar{k})$ est isomorphe comme groupe abélien à $(\bar{k}^*)^r$, donc il est bien divisible. Posons $G_L = \mathrm{Gal}\,(\bar{k}/L)$. Comme $T_L := T \times_k L$ est isomorphe à $\mathbf{G}_m^r$, le G_L-module A est isomorphe à $(\bar{k}^*)^r$ et on a donc $H^1(G_L,A) = 0$ par le théorème de Hilbert 90. La suite exacte de restriction-inflation donne alors $H^1(\mathrm{Gal}\,(L/k), A^{G_L}) \simeq H^1(G,A)$, ce qui implique que $H^1(G,A)$ est de m-torsion avec $m = \#\mathrm{Gal}\,(L/k) = [L:K]$ (2 points).

d) Soit m comme dans c). Alors, par b), $H^1(k,T)/m = 0$, mais comme $H^1(k,T)$ est de m-torsion, on obtient $H^1(k,T) = 0$ (1 point).

e) Non : prenons $A = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ avec action triviale de G. Alors $H^1(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est le groupe des caractères de G, qui est non nul par exemple pour $k = \mathbf{C}(t)$, corps de dimension cohomologique 1 qui vérifie $H^1(k, \mathbf{Z}/2) \simeq k^*/k^{*^2} \neq 0$ (t n'est pas un carré dans k^*), d'où un morphisme non constant de G dans $\mathbf{Z}/2$, qu'on peut voir comme un caractère de G, en plongeant $\mathbf{Z}/2$ dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ (2 points).

Exercice 2 (7 points)

a) Le schéma $\overline{X}$ est limite projective des $X_L := X \times_k L$ pour $L \subset \bar{k}$ extension finie galoisienne de k, vu que $\bar{k}$ est la réunion de ces L. D'après l'exemple 4.13 d), le groupe $\operatorname{Br}\overline{X}$ est la limite inductive des $\operatorname{Br} X_L$. Comme l'image de α dans $\operatorname{Br}\overline{X}$ est nulle, son image dans l'un des $\operatorname{Br} X_L$ est nulle par définition d'une limite inductive (1.5 point).

b) Comme X est lisse (donc régulière), la flèche canonique $\operatorname{Br} X \to \operatorname{Br}(k(X))$ est injective. L'image de α dans $\operatorname{Br} X_L \subset \operatorname{Br}(L(X))$ est nulle. On a donc $m\alpha = 0$ dans $\operatorname{Br}(k(X))$ par restriction-corestriction (Th. 2.35 d), version profinie de la formule 2.23), vu que $[L(X) : k(X)] = m$, donc cette égalité vaut aussi dans $\operatorname{Br} X$ (1.5 point).

c) Comme $X(k) \neq \emptyset$, X possède un point fermé de corps résiduel k, dont le degré en tant que diviseur est 1. A fortiori, sa classe dans $\operatorname{Pic}\overline{X}$ est fixée par le groupe de Galois de k, vu qu'elle provient d'un élément de $\operatorname{Pic} X$ (1 point).

d) On sait que $\operatorname{Br}\overline{X} = 0$ car le groupe de Brauer du corps de fonctions $\bar{k}(X)$ de $\overline{X}$ est déjà nul, vu que ce corps des fonctions est C_1 par le théorème de Tsen. On a donc $\operatorname{Br} X/\operatorname{Br} k$ isomorphe à $H^1(k, \operatorname{Pic}\overline{X})$ par le théorème 5.1. La suite exacte de cohomologie s'écrit

$$H^0(k, \operatorname{Pic}\overline{X}) \to \mathbf{Z} \to H^1(k, D) \to H^1(k, \operatorname{Pic}\overline{X}) \to 0,$$

vu que $H^1(k, \mathbf{Z}) = 0$. On conclut avec c) (1.5 point).

e) Commme $(\operatorname{Br} k)[n]$ est fini vu que $\operatorname{Br} k$ est isomorphe à $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, il suffit de montrer d'après d) que $H^1(k, D)[n]$. Comme D est divisible, on a une suite exacte

$$0 \to D[n] \to D \xrightarrow{\cdot n} D \to 0.$$

On en déduit une surjection $H^1(k, D[n]) \to H^1(k, D)[n]$. Comme $D[n]$ est fini et k est p-adique, le groupe $H^1(k, D[n])$ est fini, d'où le résultat (1.5 point).

Exercice 3 (7 points)

a) Le schéma U (ouvert de Zariski non vide de X) est noethérien, intègre, régulier et de dimension 1, de corps des fonctions k. La Proposition 4.23 donne une suite exacte

$$0 \to \operatorname{Br} U \to \operatorname{Br} k \to \bigoplus_{v \in U^{(1)}} H^1(k(v), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}),$$

où $k(v)$ est le corps résiduel en v, qui est fini. Ceci implique comme on l'a vu que chaque $H^1(k(v), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est isomorphe à $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, d'où le résultat (1.5 point).

b) D'après a), $\mathrm{Br}\, X$ est le sous-groupe

$$\ker[\mathrm{Br}\, k \to \bigoplus_{v\in\Omega_f} \mathrm{Br}\, k_v],$$

où $\Omega_f = X^{(1)}$ est l'ensemble des places finies de k (via l'isomorphisme $\mathrm{inv}_v : \mathrm{Br}\, k_v \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$). La suite de Brauer-Hasse-Noether (5) du paragraphe 5.3. identifie alors ce noyau avec le sous-groupe de $\bigoplus_{v\in\Omega} \mathrm{Br}\, k_v$ constitué des familles $(\alpha_v)_{v\in\Omega}$ vérifiant $\sum_{v\in\Omega} \alpha_v = 0$ et $\alpha_v = 0$ si $v \in \Omega_f$. Soit $\Omega_{\mathbf{R}}$ l'ensemble des places réelles. Comme $\mathrm{Br}\, k_v = 0$ si v est une place complexe, le groupe $\mathrm{Br}\, X$ s'identifie au sous-groupe de $\bigoplus_{v\in\Omega_{\mathbf{R}}} \mathrm{Br}\, k_v$ constitué des familles $(\alpha_v)_{v\in\Omega_{\mathbf{R}}}$ avec $\sum_{v\in\Omega_{\mathbf{R}}} \alpha_v = 0$, lequel est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2)^{r-1}$ vu que $\mathrm{Br}\, k_v = \mathbf{Z}/2$ pour toute place réelle v (2 points).

c) Par un raisonnement analogue à b), le groupe $\mathrm{Br}\, U$ s'identifie avec le sous-groupe de $\bigoplus_{v\in\Omega_f} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ constitué des familles (α_v) vérifiant $\alpha_v = 0$ si $v \notin S$ et $\sum_{v\in S} \alpha_v = 0$, ce qui montre que $\mathrm{Br}\, U$ est isomorphe à $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^{m-1}$, où m est le cardinal de S (1.5 point).

d) On utilise la suite exacte de Brauer-Hasse-Noether. Identifions $\mathrm{Br}\, k_v$ à un sous-groupe de $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ pour toute place $v \in \Omega$. Supposons que T contienne toutes les places finies de k. Alors l'élément $(1/n, 0, ...0)$ de $\bigoplus_{v\in T} \mathrm{Br}\, k_v$ (où la première composante correspond à une place finie) ne peut pas être l'image de $\alpha \in \mathrm{Br}\, k$, car l'image de α dans $\bigoplus_{v\in\Omega_k} \mathrm{Br}\, k_v$ serait alors de la forme $(1/n, 0, ...0, \epsilon_1, ..., \epsilon_r)$ avec $\epsilon_i \in \{0, 1/2\}$ pour tout i (vu que les places en dehors de T sont archimédiennes), ce qui est impossible vu que la somme $1/n + \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i$ ne serait alors pas nulle dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. En sens inverse, s'il existe une place finie v_0 hors de T, alors pour tout élément $(\alpha_v)_{v\in T}$ de $\bigoplus_{v\in T} \mathrm{Br}\, k_v$, on peut trouve α_{v_0} égal à $-\sum_{v\in T} \alpha_v$ dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, et l'élément $((\alpha_v), \alpha_{v_0}, 0, ...0)$ de $\bigoplus_{v\in\Omega} \mathrm{Br}\, k_v$ est dans l'image de $\mathrm{Br}\, k$ via Brauer-Hasse-Noether, donc a fortiori $(\alpha_v)_{v\in T}$ aussi (2 points).