Examen, M2

D. Harari

6 mai 2024; 3h

Pour tout groupe abélien A et tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $A/n := A/nA$ le conoyau de la multiplication par n dans A, et $A[n] = \{x \in A, nx = 0\}$ le sous-groupe de n-torsion de A. On rappelle que A est dit *divisible* si $A/nA = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. On rappelle aussi que si K est un corps p-adique et M un module galoisien fini sur K, alors les groupes $H^i(K, M)$ sont finis pour tout $i \in \mathbf{N}$.

Exercice 1 : Modules galoisiens divisibles (7 points)

Soit k un corps de caractéristique zéro de clôture algébrique $\bar{k}$ et de groupe de Galois absolu $G = \mathrm{Gal}\,(\bar{k}/k)$. Soit A un G-module discret divisible.

a) Montrer que pour tous $i, n \in \mathbf{N}^*$, on a une suite exacte

$$0 \to H^{i-1}(G, A)/n \to H^i(G, A[n]) \to H^i(G, A)[n] \to 0.$$

b) On suppose de plus que k est de dimension cohomologique $\mathrm{cd}(k) \leq 1$. Montrer que $H^1(G, A)$ est divisible et que $H^i(G, A) = 0$ pour tout $i \geq 2$.

c) On suppose que $A = T(\bar{k})$, où T est un k-*tore algébrique*, c'est-à-dire un k-groupe algébrique commutatif tel qu'il existe une extension finie L de k avec $T \times_k L$ isomorphe à $\mathbf{G}_m^r$ pour un certain $r \in \mathbf{N}$. Montrer qu'il existe un entier $m > 0$ tel que le groupe $H^1(k, T) = H^1(G, A)$ soit de m-torsion.

d) En déduire que si $\mathrm{cd}(k) \leq 1$ (et toujours $A = T(\bar{k})$), alors on a $H^1(G, A) = 0$.

e) Le résultat de d) reste-t-il vrai pour un G-module divisible A quelconque ?

Exercice 2 : Groupe de Brauer d'une courbe (7 points)

Soit k un corps de caractéristique zéro de clôture algébrique $\bar{k}$. Soit X une k-variété lisse et géométriquement intègre. On pose $\overline{X} = X \times_k \bar{k}$ et

$$\mathrm{Br}_1 X = \ker[\mathrm{Br}\, X \to \mathrm{Br}\, \overline{X}].$$

a) Soit $\alpha \in \mathrm{Br}_1 X$. Montrer qu'il existe une extension finie galoisienne L de k telle que l'image de α dans $\mathrm{Br}\, X_L$ soit nulle, où $X_L := X \times_k L$ (on pourra utiliser l'exemple 4.13 d) du cours sur la cohomologie étale d'une limite projective de schémas).

b) Soit $m = [L : k]$. Montrer que $m\alpha = 0$ (on pourra considérer l'extension de corps $L(X)/k(X)$, où $k(X)$ et $L(X)$ sont les corps de fonctions respectifs de X et X_L).

On suppose dans toute la suite que X est une courbe projective et lisse. On rappelle qu'on a alors une suite exacte de modules galoisiens

$$0 \to D \to \mathrm{Pic}\, \overline{X} \stackrel{\deg}{\to} \mathbf{Z} \to 0,$$

où D est divisible (c'est le groupe des $\bar{k}$-points d'une variété abélienne, la *jacobienne* de X) et vérifie que $D[n]$ est fini pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ (ici deg est l'application degré). On suppose aussi que l'ensemble $X(k)$ des k-points de X est non vide.

c) Montrer que $\deg : H^0(k, \mathrm{Pic}\, \overline{X}) \to \mathbf{Z}$ est surjective.

d) Montrer que $\mathrm{Br}\, X/\mathrm{Br}\, k$ est isomorphe à $H^1(k, D)$.

e) On suppose que k est un corps p-adique. Montrer que pour tout $n > 0$, $(\mathrm{Br}\, X)[n]$ est fini.

Exercice 3 : Groupes de Brauer et corps de nombres (7 points)

Soit k un corps de nombres. On note $\mathcal{O}_k$ l'anneau des entiers de k et on pose $X = \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_k)$ (c'est un schéma noethérien régulier de dimension 1). Soit $S = \{v_1, ..., v_m\}$ un ensemble fini de points fermés de X (correspondant à des places non archimédiennes de k). On pose $U = X - S = \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{k,S})$.

a) Montrer qu'on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Br}\, U \to \mathrm{Br}\, k \to \bigoplus_{v \in U^{(1)}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z},$$

où $U^{(1)}$ désigne l'ensemble des points fermés de U.

b) Montrer que $\mathrm{Br}\, X$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2)^{r-1}$, où r est le nombre de places réelles de k (on convient que ce groupe est 0 si $r = 0$ ou $r = 1$). On pourra utiliser la suite de Brauer-Hasse-Noether (5) du paragraphe 5.3. du cours.

c) On suppose que k n'a pas de places réelles et que $m \geq 1$. Montrer que $\mathrm{Br}\, U$ est isomorphe à $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^{m-1}$.

d) Soit T un ensemble de places de k. Montrer que l'application diagonale $\mathrm{Br}\, k \to \bigoplus_{v \in T} \mathrm{Br}\, k_v$ est surjective si et seulement s'il existe une place non archimédienne de k qui n'est pas dans T.