Corrigé de l'examen de topologie du 9 janvier 2025

Exercice 1 : Espaces localement connexes (7 points)

a) Soit U un ouvert de X et $x \in U$. Soit U' un ouvert de U contenant x, c'est aussi un ouvert de X ; comme X est localement connexe, U' contient un voisinage connexe V de x dans X, qui est aussi un voisinage connexe de x dans U. Ainsi U est localement connexe (1 point).

b) Soient X un e.v.n. et $x \in X$. Soit U un voisinage de x, alors il contient une boule ouverte $B(x, r)$ avec $r > 0$, qui est un voisinage convexe (donc connexe) de x. Ainsi, X est localement connexe (1 point).

c) Soit X la réunion des intervalles $I_1 =]0, 1[$ et $I_2 =]2, 3[$ dans $\mathbf{R}$, alors X (qui est un ouvert de $\mathbf{R}$) n'est pas connexe, car réunion des deux ouverts disjoints I_1 et I_2. Si $x \in X$, alors x est dans l'un des intervalles I_1 ou I_2, par exemple $x \in I_1$. Alors, tout ouvert de X contenant x contient une boule ouverte de $\mathbf{R}$ de centre x, donc contient un intervalle de la forme $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit, qui est connexe. Ainsi, X est localement connexe (1 point).

d) Soit V une composante connexe de U et $x \in V$. Par hypothèse, U (qui est un voisinage de x) contient un voisinage connexe U' de x. Alors, V contient U', car par définition V est le plus grand connexe inclus dans U qui contient x. Ainsi, V est voisinage de x, et ce pour tout x de V, ce qui montre que V est un ouvert de X (1.5 point).

e) Soient U un ouvert de X et $x \in U$. D'après d), la composante connexe de x dans U est un ouvert connexe inclus dans U qui contient x (0.5 point).

f) L'espace X est réunion de la droite verticale $D = \{0\} \times \mathbf{R}$ et des droites horizontales $D_a = \mathbf{R} \times \{a\}$ pour $a \in \mathbf{Q}$. Chacune de ces droites est convexe (donc connexe), et D rencontre toutes les D_a, ce qui montre que X est connexe. Notons respectivement D_a^+ et D_a^- les sous-ensembles $\mathbf{R}_+^* \times \{a\}$ et $\mathbf{R}_-^* \times \{a\}$, qui sont les deux composantes connexes de $D_a - \{(0, a)\}$.

Considérons maintenant l'ouvert $U = X - D$ de X (noter que D est un fermé de $\mathbf{R}^2$), il est réunion disjointe des $D_a - \{(0, a)\}$. Soit C une composante

connexe de X, alors l'image de C par l'application continue $p : (x, y) \mapsto y$ est un connexe inclus dans $\mathbf{Q}$, c'est donc un singleton. Ceci montre que toute composante connexe de U est incluse dans l'un des $D_a - \{(0, a)\}$, donc est égal à D_a^+ ou D_a^-. Or, D_a^+ n'est pas ouvert dans X, vu que par exemple tout voisinage de $(1, a)$ dans X contient $(1, a+\varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$ rationnel assez petit, qui est dans X mais pas dans D_a. D'après d), X ne peut pas être localement connexe (2 points).

Exercice 2 : Caractérisation d'une boule ouverte (9 points)

a) Comme B est non vide, elle contient au moins un élément x. Par hypothèse, il existe une boule ouverte contenant x incluse dans B (en particulier B est ouvert), donc l'ensemble des $r > 0$ tels que B contienne une boule ouverte de rayon r est non vide. Il est de plus majoré car B est bornée (1 point).

b) Par définition de la borne supérieure, il existe pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ une boule ouverte $B(x_n, r_n)$ incluse dans B avec $R - 1/n < r_n \leq R$. Ainsi (r_n) converge vers R (1 point).

c) Considérons la droite $(x_i x_j)$, qu'on peut identifier à la droite réelle avec par exemple $x_i < x_j$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $x_i - r_i + \varepsilon$ et $x_j + r_j - \varepsilon$ sont dans $B_i \cup B_j$, tandis que leur distance est $d(x_i, x_j) + r_i + r_j - 2\varepsilon$. Le diamètre de $B_i \cup B_j$ est donc au moins $d(x_i, x_j) + r_i + r_j - 2\varepsilon$, d'où le résultat en faisant tendre ε vers zéro (1.5 point).

d) D'après c), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux points de $B_i \cup B_j$ distants d'au moins $d(x_i, x_j) + r_i + r_j - 2\varepsilon$. Par hypothèse, il sont contenus dans une boule ouverte de rayon au plus R (dont le diamètre est $2R$), d'où

$$d(x_i, x_j) + r_i + r_j - 2\varepsilon \leq 2R.$$

En faisant tendre ε vers zéro, on obtient

$$d(x_i, x_j) + r_i + r_j \leq 2R$$

(et c'est encore vrai si $x_i = x_j$). Comme (r_i) converge vers R (par valeurs inférieures), la suite (x_n) est de Cauchy, donc converge puisque E est complet (1.5 point).

e) Soit $r < R$. Alors $B(x, r) \subset B_n = B(x_n, r_n)$ dès que $d(x, x_n) + r \leq r_n$, via l'inégalité triangulaire. Or, ceci est réalisé pour n assez grand, vu que le terme de gauche tend ves r et celui de droite vers R. On en déduit que $B(x, r) \subset B$ pour tout $r < R$, et donc $B(x, R) \subset B$ vu que $B(x, R)$ est réunion des $B(x, r)$ pour $r < R$: en effet si $d(y, x) < R$, alors $y \in B(x, r)$ avec $r = \frac{d(x,y)+R}{2}$ (1.5 point).

f) Soit z dans E tel que $d(x,z) > R$, montrons que $z \notin B$. Soit u sur la droite (xz) avec x entre z et u, alors $d(z,u) = d(x,z) + d(x,u)$, donc on peut choisir u à distance $< R$ de x et tel que $d(z,u) > 2R$. D'après e), on a alors $u \in B$. Si on avait $z \in B$, alors il existerait une boule ouverte incluse dans B (donc de rayon $\leq R$) contenant z et u, ce qui contredit $d(z,u) > 2R$. Finalement, on a bien $B \subset B_f(x,R)$ (2 points).

g) Comme B est un ouvert, il est (via f) inclus dans l'intérieur $B(x,R)$ de $B_f(x,R)$, d'où (avec e) $B = B(x,r)$ (0.5 points).

Exercice 3 : Vrai ou faux ? (6 points)

a) C'est vrai : comme un espace métrique (appelons-le E) est séparé, A est un fermé de E, donc $A \cap B$ est un fermé du compact A, il est donc compact (1 point).

b) C'est vrai : comme $\mathbf{R}$ est complet et $]0,1]$ est dense dans $[0,1]$, f se prolonge en une application uniformément continue de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$, qui est bornée vu que $[0,1]$ est compact (1 point).

c) C'est vrai : soit A une partie compacte de E, si elle était d'intérieur non vide, elle contiendrait une boule fermée $B := B_f(a,r)$ avec $r > 0$, qui serait compacte comme fermé de A. Mais alors la boule unité fermée serait compacte (par homothétie-translation), ce qui contredit le théorème de Riesz (1 point).

d) C'est faux dès que E est de dimension infinie. En effet dans ce cas E admet une base $(e_i)_{i \in I}$ avec I infini, et on peut supposer que tous les e_i sont de norme 1 (quitte à changer e_i en $\frac{e_i}{||e_i||}$). Choisissons une fonction non bornée f de I dans $\mathbf{R}^*$ (qui existe puisque I est infini) et définissons une application linéaire de E dans E par $u(e_i) = f(i)e_i$. Alors u est clairement bijective, mais non bornée sur la boule unité, donc non continue (1.5 point).

e) C'est faux. Prenons pour E un ensemble infini, muni de la distance $d(x,y) = 1$ si $x \neq y$. Alors E est discret (en particulier pas compact puisqu'il est infini). Il est évidemment borné, et également localement compact (tout point x de E admet $\{x\}$ comme voisinage compact). Enfin, E est complet vu que toute suite de Cauchy (x_n) est stationnaire (si $d(x_n, x_m) \leq 1/2$, alors $x_n = x_m$), donc converge (1.5 point).