Corrigé du partiel de topologie du 24/10/24, L3 magistère

Problème 1 : Espaces à base dénombrable (10 points)

1a) Soit (U_n) une base dénombrable d'ouverts de X. Alors, pour toute partie A de X, la famille $(U_n \cap A)$ est une famille dénombrable d'ouverts de A ; de plus, si $x \in A$ et V est un voisinage (qu'on peut supposer ouvert) de x dans A, alors V s'écrit $U \cap A$ avec U ouvert de X, donc il existe k tel que U_k contienne x et soit inclus dans U, d'où $x \in (U_k \cap A) \subset (U \cap A)$, ce qui montre finalement que $(U_n \cap A)$ est une base d'ouverts de A (1 point).

1b) Si (U_m) est une base d'ouverts de l'espace X et (V_n) est une base d'ouverts de l'espace Y, alors la famille dénombrable des $U_m \times V_n$ pour $m, n \in \mathbf{N}$ est une base d'ouverts de $X \times Y$: en effet, si $(x, y) \in X \times Y$ et Ω est un ouvert de $X \times Y$ contenant (x, y), alors Ω contient un ouvert élémentaire $U \times V$ contenant (x, y) ; on a alors un m tel que $x \in U_m \subset U$ et un n tel que $y \in V_n \subset V$, donc $U_m \times V_n$ est un voisinage ouvert de (x, y) inclus dans $U \times V$ (1 point).

1c) Soit (U_n) une base dénombrable d'ouverts de X, choisissons un point a_n dans chaque U_n (on peut supposer que tous les U_n sont non vides, quitte à en enlever). Posons $A = \{a_n\}$, c'est une partie dénombrable de X. Si maintenant $y \in X$ et U est un ouvert de X contenant y, alors on peut trouver un n tel que $y \in U_n \subset U$, donc $a_n \in U$, ce qui montre que $U \cap A \neq \emptyset$. Ainsi, A est dense dans X (1 point).

1d) Soit A une partie dénombrable dense. Considérons la famille dénombrable d'ouverts $B(y, 1/k)$ pour $k \in \mathbf{N}^*$ et $y \in A$. Soit alors $x \in X$ et U un ouvert de X contenant x, alors il contient une boule ouverte du type $B(x, 1/m)$ avec $m \in \mathbf{N}^*$. Comme A est dense, il existe alors $y \in A$ tel que $d(x, y) < \frac{1}{2m}$; par inégalité triangulaire, on a alors $B(y, \frac{1}{2m}) \subset B(x, 1/m)$, d'où

$$x \in B(y, \frac{1}{2m}) \subset B(x, 1/m) \subset U.$$

Ainsi (en prenant $k = 2m$), on voit que les $B(y, 1/k)$ pour $k \in \mathbf{N}^*$ et $y \in A$ constituent une base d'ouverts de X (2 points).

2a) Il suffit de montrer que l'intersection de deux parties du type $[a, b[$ est encore réunion (éventuellement vide) de parties de ce type. Or, $[a, b[\cap[c, d[= [\max(a, c), \min(b, d)[$, qui est vide ou bien de la forme $[\alpha, \beta[$ avec $\alpha < \beta$ (1 point).

2b) Montrons que $\mathbf{Q}$ est dense dans X. Il suffit de montrer que tout ouvert non vide de X contient un rationnel. Or, un tel ouvert contient un ensemble de la forme $[a, b[$ avec $a < b$, d'où le résultat vu que $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$ pour la topologie usuelle de $\mathbf{R}$ (1 point).

2c) Soit $(x, -x)$ un point de la droite D. considérons alors l'ouvert

$$U := [x, x + 1[\times[-x, -x + 1[$$

de $X \times X$, il contient $(x, -x)$. L'intersection $U \cap D$ est constituée des $(y, -y)$ avec $x \leq y < x + 1$ et $-x \leq -y < -x + 1$, ce qui implique $y = x$, donc $U \cap D = \{(x, -x)\}$. Ainsi, tout singleton de $X \times X$ en est un ouvert, ce qui implique que $X \times X$ est discret (1.5 point).

2d) D'après 1)a), si X était à base dénombrable, $X \times X$ le serait aussi, donc également D qui est un sous-espace de $X \times X$. Mais ceci n'est pas possible car D est discret, donc s'il y avait une base dénombrable (U_n) de D, on aurait pour tout x de D un n tel que $U_n = \{x\}$ (vu que $\{x\}$ est un ouvert de D), et D serait dénombrable, ce qui n'est pas le cas vu que $\mathbf{R}$ n'est pas dénombrable (1.5 point).

Problème 2 : Groupes topologiques (10 points)

1a) Les applications $f_1 : (x, y) \mapsto x^{-1}$ et $f_2 : (x, y) \mapsto y$ sont continues de $G \times G$ dans G (la première est la composée de la première projection avec $x \mapsto x^{-1}$, la deuxième est la deuxième projection). Du coup, l'application $(x, y) \mapsto (f_1(x), f_2(x))$ est continue de $G \times G$ dans lui-même, vu que ses deux composantes sont continues. Or, l'application $f : (x, y) \mapsto x^{-1}y$ est la composée de cette application avec l'application continue $(u, v) \mapsto uv$ de $G \times G$ dans G (1 point).

1b) On observe que $f(1, 1) = 1$. Comme f est continue, il existe un voisinage ouvert Ω de $(1, 1)$, qu'on peut supposer de la forme $U_1 \times U_2$ avec U_1, U_2 ouverts de G, tel que $f(\Omega) \subset V$. Posons $U = U_1 \cap U_2$, alors on a pour tout $(x, y) \in U \times U$, $x^{-1}y \in V$. Ainsi, U répond à la question (1 point).

2. Soit $x \in X$ non dans $\bigcup_{i\in I} A_i$. Il existe alors un voisinage (qu'on peut supposer ouvert) V de x tel que $V \cap A_i = \emptyset$ si $i \notin J$, où J est un sous-ensemble fini de I. Comme $\bigcup_{i\in J} A_i$ est fermé comme réunion finie de fermés et x n'est pas dans ce fermé, il existe un voisinage ouvert V' de x tel que $V' \cap \bigcup_{i\in J} A_i = \emptyset$. Posons alors $U = V \cap V'$, c'est un voisinage ouvert de

x qui ne rencontre pas $\bigcup_{i\in I} A_i$. Finalement $\bigcup_{i\in I} A_i$ est fermé, vu que son complémentaire est ouvert (1.5 point).

3a) Comme H est discret, $\{1\}$ est ouvert dans H, ce qui se traduit par le fait qu'il s'écrit $V \cap H$, où V est un ouvert de G (1 point).

3b) Il suffit d'appliquer 1)b) et 3a) (0.5 point).

3c) On observe que xU est l'image réciproque de l'ouvert U par l'application continue $y \mapsto x^{-1}y$ de G dans G, c'est donc aussi un ouvert de G. De plus xU contient x car U contient 1. Soient alors y, z deux éléments distincts de $H \cap xU$, alors $y^{-1}z \in U^{-1}U \cap H$, d'où $y^{-1}z = 1$ via 3b), soit $y = z$, contradiction (1.5 point).

3d) Soit $x \in G$, alors xU est un voisinage ouvert de x, qui contient au plus un élément de H d'après 3)c). A fortiori, $xU \cap \{h\}$ est vide pour tout h sauf un nombre fini dans H. Maintenant, comme G est séparé, chaque $\{h\}$ est fermé, donc aussi leur réunion d'après 2. Ainsi, H est fermé (1.5 point).

4a) Non : prendre le groupe additif $G = \mathbf{R}^2$ et le sous-groupe constitué des $(x, 0)$ avec $x \in \mathbf{R}$, il est fermé (image réciproque de $\{0\}$ par l'application continue $(x, y) \mapsto y$) mais pas discret car homéomorphe à $\mathbf{R}$ (1 point).

4b) Non plus : on regarde dans $\mathbf{R}$ le sous-ensemble constitué des $1/n$ pour $n \in \mathbf{N}^*$. Il est clairement discret, mais 0 est adhérent à cet ensemble sans être dedans (1 point).