Examen de topologie, L3 magistère (3h)

D. Harari, M. Gomez, R. Santharoubane

9 janvier 2024

Tout énoncé vu en cours (mais pas s'il a été vu seulement en TD) peut être utilisé sans démonstration. On peut dans chaque exercice, admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure.

Le symbole (*) désigne une question a priori plus difficile.

Exercice 1 : Espaces localement connexes (7 points)

On dit qu'un espace topologique X est *localement connexe* si tout point x de X admet une base de voisinages connexes (autrement dit : tout voisinage U de x contient un voisinage connexe V de x).

a) Montrer que si X est localement connexe, tout ouvert de X est localement connexe.

b) Montrer qu'un espace vectoriel normé est localement connexe.

c) Donner un exemple d'espace topologique localement connexe qui n'est pas connexe.

d) Montrer que si X est localement connexe et U est un ouvert de X, les composantes connexes de U sont des ouverts de X.

e) En déduire que si X est localement connexe, tout point de X admet une base de voisinages à la fois ouverts et connexes de X.

f) (*) Soit X la partie de $\mathbf{R}^2$ définie comme la réunion de $D := \{0\} \times \mathbf{R}$ et de $\mathbf{R} \times \mathbf{Q}$. Montrer que X (muni de la topologie induite par la topologie usuelle de $\mathbf{R}^2$) est connexe mais n'est pas localement connexe (on pourra regarder les composantes connexes de $X - D$).

Exercice 2 : Caractérisation d'une boule ouverte (9 points)

Soit E un espace de Banach. Soit B une partie non vide et bornée de E. On suppose que pour tous points x, y de B, il existe une boule ouverte de E incluse dans B qui contient x et y. On note d la distance sur E induite par la norme, soit $d(a, b) = ||a - b||$ pour tous $a, b \in E$. Pour tout $r > 0$, on note

$B(a,r)$ (resp. $B_f(a,r)$) la boule ouverte (resp. fermée) de E de centre a et de rayon r.

a) Montrer que l'ensemble des $r > 0$ tels que B contienne une boule ouverte de E de rayon r est non vide et majoré. On note R sa borne supérieure.

b) Montrer qu'il existe une suite $B_n = B(x_n, r_n)$ de boules ouvertes de E incluses dans B avec (r_n) tendant vers R.

c) Montrer que si $x_i \neq x_j$ (avec $i, j \in \mathbf{N}^*$), alors le diamètre de $B_i \cup B_j$ est au moins $r_i + r_j + d(x_i, x_j)$.

d) En déduire que $r_i + r_j + d(x_i, x_j) \leq 2R$, puis que la suite (x_n) converge. On note x sa limite.

e) Montrer que $B(x,R) \subset B$ (on pourra comparer $B(x,r)$ à B_n pour $r < R$ et n assez grand).

f) (*) Montrer que $B \subset B_f(x,R)$ (on pourra, pour z tel que $d(x,z) > R$, considérer u bien choisi sur la droite (xz)).

g) En déduire que $B = B(x,R)$ (on pourra admettre que l'intérieur de $B_f(x,R)$ est $B(x,r)$).

Exercice 3 : Vrai ou faux ? (6 points)

Parmi les assertions suivantes, démontrer celles qui sont vraies et donner un contre-exemple pour celles qui sont fausses (on indiquera d'abord si l'assertion est vraie ou fausse).

a) Soient A et B deux parties compactes d'un espace métrique. Alors $A \cap B$ est compacte.

b) Si f est une application uniformément continue de $]0,1]$ dans $\mathbf{R}$, alors f est bornée.

c) Si E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé de dimension infinie, toute partie compacte de E est d'intérieur vide.

d) Soit E un espace de Banach sur $\mathbf{R}$ (dont on admet qu'il possède une base $(e_i)_{i \in I}$ en tant que $\mathbf{R}$-espace vectoriel). Si f est une application linéaire bijective de E dans E, alors f est continue.

e) (*) Soit E un espace métrique complet, localement compact, et borné. Alors E est compact.