Partiel de topologie, L3 magistère (3h)

D. Harari, M. Gomez, R. Santharoubane

24 octobre 2024

Tout énoncé vu en cours (mais pas s'il a été vu seulement en TD) peut être utilisé sans démonstration. On peut dans chaque problème, admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure.

Le symbole (*) désigne une question a priori plus difficile.

Problème 1 : Espaces à base dénombrable (10 points)

On dit qu'un espace topologique X est *à base dénombrable* s'il existe une famille dénombrable $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'ouverts de X qui en constitue une base (c'est-à-dire que pour tout $x \in X$ et tout voisinage V de x, il existe un $n \in \mathbf{N}$ tel que $\{x\} \subset U_n \subset V$).

1. a) Montrer que si X est à base dénombrable, toute partie de X (munie de la topologie induite) est à base dénombrable.

b) Montrer que le produit de deux espaces topologiques à base dénombrable est encore à base dénombrable (on rappelle que si E et F sont des ensembles dénombrables, alors le produit $E \times F$ est dénombrable).

c) Montrer que si X est à base dénombrable, alors il existe une partie dénombrable A de X qui est dense (c'est-à-dire telle que $\overline{A} = X$).

d) (*) Montrer que si X est un espace métrique qui possède une partie dénombrable dense A, alors X est à base dénombrable (on pourra commencer par observer que si $x, y \in X$ vérifient $d(x, y) \leq \frac{1}{2m}$ avec $m \in \mathbf{N}^*$, alors $B(y, \frac{1}{2m}) \subset B(x, \frac{1}{m})$, et appliquer cela à $y \in A$).

2. a) Montrer qu'on définit une topologie $\mathcal{T}$ sur $\mathbf{R}$ en prenant comme ouverts : $\emptyset$, $\mathbf{R}$, et les réunions de parties du type $[a, b[$ avec a et b réels vérifiant $a < b$.

b) Montrer que l'espace topologique $X := (\mathbf{R}, \mathcal{T})$ admet une partie dénombrable dense.

c) On munit $X \times X$ de la topologie produit. Montrer que la topologie induite par $X \times X$ sur la droite $D = \{(x, -x), x \in \mathbf{R}\}$ est la topologie discrète.

d) (*) En déduire que X n'est pas à base dénombrable.

Problème 2 : Groupes topologiques (10 points)

Soit G un groupe, dont la loi est notée multiplicativement et le neutre est noté 1. On suppose G muni d'une topologie telle que les applications

$$G \times G \to G,\ (x, y) \mapsto xy$$

et

$$G \to G,\ x \mapsto x^{-1}$$

soient continues, où $G \times G$ est muni de la topologie produit (on dit que G est un *groupe topologique*).

1. a) Montrer que l'application $(x, y) \mapsto x^{-1}y$ est continue de $G \times G$ dans G.

b) En déduire que pour tout voisinage V de 1, il existe un voisinage ouvert U de 1 tel que $U^{-1}U \subset V$, où $U^{-1}U$ désigne l'ensemble des $x^{-1}y$ avec $x, y \in U$.

2. Soit X un espace topologique. On dit qu'une famille de parties $(A_i)_{i\in I}$ de X est *localement finie* si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de x tel que l'ensemble des $i \in I$ vérifiant $(V \cap A_i) \neq \emptyset$ soit fini. Montrer que si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille localement finie de fermés de X, alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est un fermé de X.

3. Soit G un groupe topologique séparé. Soit H un sous-groupe de G, que l'on suppose discret pour la topologie induite. On se propose de montrer que H est un fermé de G.

a) Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de 1 tel que $V \cap H = \{1\}$.

b) Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de 1 avec $(U^{-1}U) \cap H = \{1\}$.

c) Soit $x \in G$. On note $xU := \{xu, u \in U\}$. Montrer que xU est un voisinage ouvert de x dans G, tel que xU ne puisse pas contenir deux éléments distincts de H.

d) (*) En déduire que la famille $(\{h\})_{h\in H}$ est localement finie, et conclure.

4. a) Réciproquement, est-ce que tout sous-groupe fermé d'un groupe topologique G est toujours discret ?

b) Soit A un sous-ensemble (pas forcément un sous-groupe) d'un groupe topologique G. On suppose que A est discret, est-ce que A est toujours fermé dans G ?