Feuille d'exercices 1 : Topologies et distances

1. Espaces métriques

Exercice 1 Topologie de $\mathbb{R}$, topologie induite.

(1) Dans $\mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle, on considère les ensembles $[0,1]$, $[0,1[$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Sont-ils ouverts dans $\mathbb{R}$? Sont-ils fermés dans $\mathbb{R}$?

(2) On munit $\mathbb{R}^*$ de la distance induite par la distance usuelle de $\mathbb{R}$. La partie $]0,1]$ est-elle ouverte dans $\mathbb{R}^*$? Est-elle fermée dans $\mathbb{R}^*$?

Exercice 2 Ouverts-fermés de $\mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}$ de sa topologie usuelle. Soient A une partie non vide, ouverte et fermée de $\mathbb{R}$ et $a \in A$. On note $B = \{b > a \ : \ [a,b] \subset A\}$

(1) Vérifier que B est non vide.

(2) Montrer que $\sup(B) = +\infty$.

(3) Décrire les parties ouvertes et fermées de $\mathbb{R}$.

Exercice 3 Comparaison de distances sur $\mathbb{R}^2$. En utilisant l'identification usuelle du plan $\mathbb{R}^2$ à l'ensemble des nombres complexes, on définit $d(z,z')$ par :
— $|z - z'|$ si $\arg(z) = \arg(z') \mod \pi$ et si z et z' sont non nuls,
— $|z| + |z'|$ sinon.

(1) Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}^2$ (on l'appelle la distance SNCF...).

(2) Dessiner quelques boules ouvertes pour la distance d.

(3) Soit d_0 la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe des suites qui sont convergentes dans $(\mathbb{R}^2, d_0)$, mais pas dans $(\mathbb{R}^2, d)$.

(4) Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge pour d vers une limite ℓ.
   (a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $d(z_n, \ell) = |z_n - \ell|$.
   (b) En déduire que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également pour d_0.

Exercice 4 Une distance entre suites. On considère l'ensemble $X = E^{\mathbb{N}^*}$ des suites à valeurs dans un ensemble E non vide. Pour toutes suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$, on note $I(x,y)$ l'ensemble des indices $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $x_n \neq y_n$ et l'on pose

$$d(x,y) = \begin{cases} 1/\min I(x,y) & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(1) Montrer que d est une distance sur X qui vérifie l'inégalité

$$d(x,z) \leqslant \max(d(x,y), d(y,z)).$$

À quelle condition a-t-on égalité ?

(2) Décrire les boules ouvertes et les boules fermées pour cette distance. Que remarque-t-on ?

(3) Soit $B(x,r)$ une boule de rayon $r > 0$ et soit $y \in B(x,r)$. Montrer que $B(x,r) = B(y,r)$. Autrement dit, tout point d'une boule est au centre.

(4) En déduire que si deux boules ouvertes ont un point commun, alors l'une est contenue dans l'autre.

Exercice 5 Boules ouvertes et boules fermées.

(1) Montrer que dans un espace métrique (X, d), toute boule fermée est fermée.

(2) Soient $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, $x \in E$ et $r > 0$. Déterminer l'adhérence dans E de la boule ouverte $B(x, r)$.

(3) Soit $X = [0,1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$. On munit $\mathbb{R}^2$ de la distance d définie par

$$d((x,y),(x',y')) = \max(|x-x'|, |y-y'||),$$

et X de la distance induite par d (encore notée d). Comparer, dans (X, d), l'adhérence de la boule ouverte de centre $(\frac{1}{2}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ avec la boule fermée de centre $(\frac{1}{2}, 0)$ de rayon $\frac{1}{2}$. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 6 Sous-groupes de $\mathbb{R}$.

(1) Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à 0. On note $a = \inf\left(G \cap \mathbb{R}_+^*\right)$.

(a) On suppose $a = 0$. Montrer alors que G est dense dans $\mathbb{R}$.

(b) On suppose $a \neq 0$. Montrer que $a \in G$, puis que $G = a\mathbb{Z}$. En déduire que $G \subset \mathbb{R}$ est fermé.

(2) Soient α et β deux réels non nuls et $G = \{m\alpha + n\beta \mid (m,n) \in \mathbb{Z}^2\}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que G soit fermé dans $\mathbb{R}$.

(3) Soient $F, G \subset \mathbb{R}$ deux fermés. L'ensemble $F + G$ est-il fermé dans $\mathbb{R}$?

(4) L'ensemble $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\pi$ est-il fermé ? En déduire

(a) L'adhérence dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble des irrationnels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

(b) L'existence de deux suites d'entiers $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tendent vers $+\infty$ et telles que

$$\lim_{n\to+\infty}(q_n\pi - p_n) = 0.$$

Exercice 7 Valeurs d'adhérence. Déterminer les valeurs d'adhérence des suites de terme général :

(1) $u_n = \sin(2n\pi/3) + (-1)^n$,

(2) $v_n = \cos(2n\pi/3) + 1/n$.

Exercice 8 Valeurs d'adhérence II : Le retour. Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite de terme général $u_n = \cos(v_n)$, où

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(1) Rappeler brièvement quelles sont les limites de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(v_{n+1} - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On fixe maintenant un réel $\theta \in [0, 2\pi[$.

(2) Soit $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $N' > N$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que

$$|v_{N'} - \theta - 2m\pi| < \epsilon.$$

(3) Soit maintenant $x \in [-1, 1]$, $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $N' > N$ tel que

$$|u_{N'} - x| < \epsilon.$$

(4) Conclure.

Exercice 9 Valeurs d'adhérence III : Le retour de la revanche.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que

$$\lim_{n\to\infty}(u_{n+1}-u_n)=0.$$

Montrer que l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est un intervalle.

2. Espaces topologiques

Exercice 10 Zérologie

(1) Quelles sont la ou les topologies sur l'ensemble vide ?

(2) Quelles sont la ou les topologies sur un ensemble à un élément ?

(3) Quelles sont la ou les topologies sur un ensemble à deux éléments ? Les singletons sont-ils toujours fermés ?

Exercice 11 Une topologie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{T}=\{\mathbb{R},\emptyset\}\cup\{]a,+\infty[;\ a\in\mathbb{R}\}$ l'ensemble des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ dont une des bornes est $+\infty$.

(1) Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit $x\in\mathbb{R}$. Quelle est l'adhérence de $\{x\}$ (c'est-à-dire l'intersection de tous les fermés contenant x) ?

Exercice 12 Changement de distance. Soit (X,d) un espace métrique. On pose $d'=\min(1,d)$.

(1) Montrer que d' est une distance sur X.

(2) Les distances d et d' sont-elles topologiquement équivalentes ?

(3) Les distances d et d' sont-elles Lipschitz équivalentes ?

Exercice 13 Nombres premiers. *L'objectif de cet exercice est de donner une preuve "topologique" du fait que l'ensemble des nombres premiers est infini.*

Pour $\alpha\in\mathbb{Z}^*$ et $\beta\in\mathbb{Z}$ on pose $S(\alpha,\beta)=\alpha\mathbb{Z}+\beta$. On définit $\mathcal{T}$ comme l'ensemble des réunions de parties de $\mathbb{Z}$ de la forme $S(\alpha,\beta)$, ou $\emptyset$.

(1) Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\mathbb{Z}$.

(2) Montrer que pour tout $\alpha\in\mathbb{Z}^*$ et $\beta\in\mathbb{Z}$, l'ensemble $S(\alpha,\beta)$ est fermé.

(3) Montrer qu'aucune partie finie non vide de $\mathbb{Z}$ n'est ouverte.

(4) Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

(a) Expliciter le complémentaire dans $\mathbb{Z}$ de l'ensemble

$$X=\bigcup_{p\in\mathcal{P}}p\mathbb{Z}.$$

(b) Montrer que X n'est pas fermé, puis conclure.

3. Adhérence, intérieur

Exercice 14 (1) Dans $\mathbb{R}$, donner (en justifiant brièvement) l'adhérence et l'intérieur des parties suivantes :

(a) $[1,2[$

(b) $]-1,1[$
(c) $\mathbb{Q}$
(d) $\mathbb{Q}\cap]\sqrt{2},3]$.

(2) Soit X un ensemble et $A \subset X$. Décrire l'adhérence et l'intérieur de A lorsque :
(a) X est muni de la topologie grossière ;
(b) X est muni de la topologie discrète.

Exercice 15 Soit X un espace topologique, et $A \subset X$.

(1) Si $A = \overline{A}$, que peut-on dire de A ? Et si $A = \mathring{A}$?
(2) Si $X = \mathbb{R}$, et A est borné et non vide, montrer que $\sup(A) \in \overline{A}$.
(3) On munit A de la topologie induite. Si $O \subset A$ est un ouvert, est-ce un ouvert de X ? Et si $F \subset A$ est fermé pour la topologie induite, est-ce un fermé de X ? Pour quels A est-ce le cas ?
(4) Montrer que les fermés de A (pour la topologie induite) sont les parties de la forme $F \cap A$, où F est un fermé de X.
(5) La suite (x_n) définie par $x_n = \frac{1}{n}$ est-elle convergente :
(a) dans $\mathbb{R}$, muni de la topologie usuelle ?
(b) dans $]0,1[$, muni de la topologie induite ?
(6) Donner un exemple d'espace topologique non séparé.

Exercice 16 Frontière.
Soit X un espace topologique. Soit $A \subset X$.

(1) Montrer que $\overline{X \setminus A} = X \setminus \mathring{A}$ et $X \setminus \overline{A} = \widehat{X \setminus A}$.
(2) La *frontière* de A est définie par
$$\partial(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}.$$
(a) Montrer que $\partial(A)$ est un fermé de X.
(b) Soit $x \in X$. Montrer que $x \in \partial(A)$ si et seulement si tout voisinage de x rencontre à la fois A et $X \setminus A$.

Exercice 17 Adhérence.
Soient A et B deux parties d'un espace topologique X.

(1) Comparer $\overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B}$.
(2) Même question pour $\overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B}$.
(3) Si A est ouvert, montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$. Qu'en est-il si A n'est pas ouvert ?

Exercice 18 Parties denses. Soit X un espace toplogique, et $D \subset X$ un sous-ensemble. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) D est dense dans X (i.e. $\overline{D} = X$).
ii) Pour tout ouvert non vide U de X, on a $U \cap D \neq \emptyset$.
iii) Le complémentaire de D dans X est d'intérieur vide.
iv) L'espace X est l'unique fermé contenant D.

Exercice 19 Espaces séparés

(1) Soit X un ensemble, et $\mathcal{T}$ l'ensemble des complémentaires de parties finies de X, union $\emptyset$.
   (a) Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur X.
   (b) L'espace $(X, \mathcal{T})$ est-il séparé ?

(2) Reprendre les espaces topologiques définis dans les Exercices 10 et 11. Sont-ils séparés ?