Feuille d'exercices 4 : Espaces complets et Théorème de Baire - Compacité

1. Espaces complets - Théorème de Baire

Exercice 1 Complété d'un espace métrique.

Soit (X, d) un espace métrique. Notons $\mathcal{C}_b(X)$ l'ensemble des fonctions continues bornées de X dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$. On fixe $x_0 \in X$.

(1) Montrer que l'application $\phi : X \to \mathcal{C}_b(X, \mathbb{R})$ définie par

$$\phi(x)(y) = d(y, x) - d(y, x_0)$$

est isométrique (elle préserve les distances).

(2) En déduire qu'il existe un espace métrique complet $\widehat{X}$ tel que X est isométrique à une partie dense de $\widehat{X}$. *On dit que $\widehat{X}$ est un* complété *de X.*

(3) Supposons que $\widetilde{X}$ est un espace métrique complet et que $X \subset \widetilde{X}$ est une partie dense. Montrer qu'il existe une unique isométrie surjective $\widetilde{X} \to \widehat{X}$ qui prolonge $\phi : X \to \widehat{X}$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que pour tout $x > 0$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(nx) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Indication : on pourra poser, pour $\varepsilon > 0$ fixé, $F_n = \{x > 0 \mid \forall p \geq n, |f(px)| \leq \varepsilon\}$

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la suite $(f(kx))_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée. On veut montrer que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, considérons les ensembles $F_N = \{x \geq 0 \mid \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |f(kx)| \leq N\}$.

(1) Montrer que F_N est fermé pour tout N.

(2) Montrer qu'il existe au moins un $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'ensemble F_{N_0} contient un intervalle ouvert non vide de la forme $]a, b[$ (*Indication :* on utilisera le Théorème de Baire).

(3) Montrer que f est bornée par N_0 sur l'intervalle $[A, +\infty[$ où $A = \frac{ab}{b-a}$.

(4) En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

2. Espaces compacts

Exercice 4 Des ensembles compacts ?

On munit $\mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 1)$ de sa topologie naturelle, et les parties $A \subset \mathbb{R}^N$ de la topologie induite. Les ensembles suivants sont-ils compacts ?

(1) $\mathbb{Z}$, $\{(1/n, y) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{Z}^*, 0 \leqslant y \leqslant 1/n\}$ et $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$.

(2) Les groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{O}(n)$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$.

(3) L'ensemble $\{P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid P^2 = P, \ker(P) \perp \mathrm{Im}(P)\}$ des projecteurs orthogonaux, $\mathbb{R}^n$ étant muni d'une structure euclidienne.

(4) (*) L'ensemble $\{P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid P^2 = P\}$ des projecteurs.

Exercice 5 Une partie compacte. Soient X un espace topologique séparé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X qui converge vers une limite notée x. Montrer que $\{x_n \mid n \geqslant 0\} \cup \{x\}$ est une partie compacte de X.

Exercice 6 Distance à une partie II.

Soit (X, d) un espace métrique. On rappelle que si $A \subset X$ et $x \in X$ on note

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}.$$

(1) Soit K une partie compacte de X.

(a) Montrer que pour tout $x \in X$, il existe un point $y \in K$ tel que $d(x, y) = d(x, K)$.

(b) Supposons que pour chaque $x \in X$, le point qui réalise la distance à K est unique et on note ce point $p(x)$. Montrer alors que l'application "projection" $p : X \to K$ est continue.

(2) Soient $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E de dimension n. On note d la distance associée à la norme $\|\cdot\|$.

(a) Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe $y \in F$ tel que $d(x, F) = d(x, y)$.

(b) Y a-t-il unicité ? *On pourra par exemple travailler dans* $\mathbb{R}^2$ *muni de la norme* $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 7 Soit $f : X \to Y$ une application entre deux espaces métriques.

(1) Montrer que si f est continue alors son graphe $\Gamma_f := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$ est fermé dans $X \times Y$. La réciproque est-elle vraie en général ?

(2) Montrer réciproquement que si Y est compact et Γ_f est fermé, alors f est continue.

Exercice 8 Applications propres.

Une application $f : X \to Y$ entre deux espaces topologiques est dite *propre* si pour tout compact K de Y, $f^{-1}(K)$ est un compact de X. On travaillera ici avec une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue.

(1) Montrer que f est propre si et seulement si $\|f(x)\| \to +\infty$ lorsque $\|x\| \to +\infty$.

(2) On suppose f propre. Montrer que f est fermée (i.e. l'image directe de tout ensemble fermé est un fermé).

Exercice 9 Soit (X, d) un espace métrique compact.

(1) On suppose X discret. Montrer alors que X est fini.

(2) Montrer que X contient une partie au plus dénombrable dense. On dit que X est *séparable*.

(3) Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts non vides de X, deux à deux disjoints. Montrer que I est au plus dénombrable.

Exercice 10 Une partie compacte de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Soit $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels positifs et $K_\alpha \subset \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ la partie définie par

$$K_\alpha = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2 \mid |u_n| \leqslant \alpha_n\}.$$

Montrer que K_α est compact si et seulement si $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Exercice 11 Soit $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ le disque unité ouvert et soit $K \subset D$ un compact.

(1) Montrer qu'il existe un compact L avec $K \subset L \subset D$ tel que $D \backslash L$ est connexe.

(2) Soit $A = \{z \in \mathbb{C}, 1 < |z| < 2\}$ un anneau ouvert. Les espaces topologiques D et A sont-ils homéomorphes ?

Exercice 12 Sommes de parties.

Deux parties A et B d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ étant données, on note

$$A + B = \{x + y \mid (x, y) \in A \times B\}.$$

(1) Montrer que si A est ouverte, alors $A + B$ est ouverte.

(2) Montrer que si A est fermée et B est compacte, alors $A + B$ est fermée.

(3) Montrer que si A et B sont compactes, alors $A + B$ est compacte.

Exercice 13 Applications ouvertes, applications fermées.

Soient X et Y deux espaces topologiques. Une application $f : X \to Y$ est dite *ouverte* si l'image de tout ouvert est un ouvert et *fermée* si l'image de tout fermé est un fermé.

(1) Monter que toute application polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est fermée.

(2) Montrer que l'application $p : (x, y) \in X \times Y \mapsto x \in X$ est ouverte. Est-elle fermée ?

(3) Construire une application surjective, ouverte et fermée mais non continue.

(4) Montrer que toute application continue ouverte de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est monotone.

Exercice 14 Soit K un espace métrique compact (non vide). Soit $f : K \to K$ telle que pour tous $x \neq y \in K$ on a $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$.

(1) Montrer qu'il existe un unique p tel que $f(p) = p$. *Indication : on pourra considérer* $\inf_{x \in X} d(x, f(x))$.

(2) Trouver un exemple de fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie que pour tout $x \neq y \in \mathbb{R}$ on a $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ mais qui n'a pas de point fixe.

Exercice 15 On munit $E = \mathbb{R}^n$ d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $f : E \to E$ une application linéaire inversible. On suppose que

— Pour tout $x \in E$, si $x \neq 0$ alors $\langle f(x), x \rangle \neq 0$;

— Il existe un $x_0 \in E$ tel que $\langle f(x_0), x_0 \rangle > 0$.

Démontrer qu'il existe un r tel que $\langle f(x), x \rangle \geqslant r\|x\|^2$.