Feuille d'exercices 5 : Espaces complets, espaces de Banach

1. Espaces complets et espaces de Banach

Exercice 1 Boules fermées emboîtées.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Pour tout entier $j \geqslant 0$ soit a_j un point de E et soit r_j un réel $\geqslant 0$. Soit B_f^j la boule fermée de centre a_j et de rayon r_j. On suppose que la suite $(B_f^j)_{j\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion. Montrer qu'il existe $a \in E$ et $r \geqslant 0$ tels que

$$\bigcap_{j=0}^{+\infty} B_f^j = B_f(a, r).$$

On pourra montrer premièrement que la suite $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et deuxièmement que la suite $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

2. Applications linéaires continues sur des espaces vectoriels normés

Exercice 2 Soit E un espace de Banach, et $T : E \to E$ une application linéaire continue. Montrer que si $|||\mathrm{Id} - T||| < 1$, alors T est inversible (autrement dit, il existe une application linéaire continue $U : E \to E$ telle que $T \circ U = \mathrm{Id} = U \circ T$).

Exercice 3 Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Pour $\phi \in E$, notons $T_\phi : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$T_\phi(f) = \int_0^1 \phi(t) f(t) \mathrm{d}t.$$

(1) Montrer que T_ϕ est une forme linéaire continue sur E.

(2) Si $\phi > 0$, calculer la norme de T_ϕ. Existe-il $f \in E$ de norme 1 tel que $|T_\phi(f)| = |||T_\phi|||$?

(3) Si $\phi(x) = \cos(\pi x)$, calculer la norme de T_ϕ. Existe-il $f \in E$ de norme 1 tel que $|T_\phi(f)| = |||T_\phi|||$?

Exercice 4 Dual de ℓ^p

Pour un réel $p > 1$, on note

$$\ell^p = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p < +\infty \right\}$$

et on pose, pour $u \in \ell^p$,

$$\|u\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p \right)^{1/p}.$$

On rappelle que $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach. Le but de cet exercice est de décrire le dual topologique $\ell^{p\prime}$ de cet espace.

Soit q défini par la relation $1/p + 1/q = 1$. On rappelle l'inégalité de Hölder : pour tout $u \in \ell^p$, $v \in \ell^q$, la série de terme général $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument convergente et

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n v_n| \leqslant \|u\|_p \|v\|_q.$$

(1) Soit $v \in \ell^q$. Montrer que l'application

$$T_v : u \in \ell^p \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n u_n \in \mathbb{C}$$

est bien définie, est une forme linéaire continue sur ℓ^p, et déterminer sa norme.

(2) Soit T une forme linéaire continue sur ℓ^p. On va montrer qu'il existe $v \in \ell^q$ tel que $T = T_v$. Pour $j \in \mathbb{N}$, on définit la suite $e(j) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ par $e(j)_i = 1$ si $i = j$ et $e(j)_i = 0$ sinon. Pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $N \in \mathbb{N}$, on note

$$u^N = (u_n \mathbf{1}_{n\leqslant N})_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{j=0}^{N} u_j e(j).$$

(a) Soit $j \in \mathbb{N}$. On pose alors $v_j = T(e(j))$, montrer que $\|v^N\|_q \leqslant |||T|||$ pour tout N, puis montrer que la suite $v = (v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ appartient à ℓ^q.

(b) Soit $u \in \ell^p$. Montrer que $(u^N)_{N\in\mathbb{N}}$ tend vers u dans ℓ^p et en déduire que $T = T_v$.

Exercice 5 Espaces précompacts.

Soit (A, d) un espace métrique. On dit que A est *précompact* si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $a_1, \dots, a_n \in A$ tels que

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} B_f(a_i, \epsilon)$$

(1) Expliquer pourquoi si A est compact alors A est précompact.

(2) Supposons que A est à la fois complet et précompact. On veut montrer que A est compact.

(a) Montrer que A est borné. Quitte à multiplier la distance d par un scalaire bien choisi, nous supposerons donc que $A = B(x_0, 1)$, pour un certain $x_0 \in A$.

(b) Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de A. Supposons que $(O_i)_{i\in I}$ n'admette aucun sous-recouvrement fini. Démontrer que l'on peut définir par récurrence une suite de boules fermées $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
i) B_n est de rayon $\frac{1}{2^n}$;
ii) B_n n'est pas recouverte par un sous-recouvrement fini de $(O_i)_{i\in I}$;
iii) Le centre x_{n+1} de B_{n+1} est dans B_n.

(c) Prouver que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, et qu'elle admet une limite $a \in A$.

(d) Montrer qu'il existe j tel que, pour n assez grand on ait $B_n \subset O_j$ et conclure.

(3) Soit E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $\left(\frac{u_n}{n+1}\right)$ est bornée. On définit, pour $u \in E$,

$$\|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1}|u_n|.$$

(a) Vérifier que E est un espace de Banach.

(b) Soit A le sous-ensemble de E formé des suites à valeurs dans $[0, 1]$. Montrer que A est précompact. En déduire qu'il est compact.

Exercice 6 Soit E un e.v.n. sur $\mathbb{R}$. Soit F un sous-espace vectoriel fermé de E. Pour tout x de E, on note $\bar{x}$ sa classe dans le quotient E/F, et on pose

$$N(\bar{x}) = \inf_{f\in F} \|x + f\|.$$

(1) Montrer que N est une norme sur E/F. Que se passe-t-il si F n'est pas fermé ?

(2) Soit π la surjection canonique de E dans E/F, montrer que π est continue si E/F est munie de la norme N.

(3) Soit u une application linéaire continue de E dans un e.v.n. G. On suppose que $F \subset \ker u$. Montrer qu'il existe une unique application linéaire continue $\bar{u}$ de E/F (muni de la norme N) dans G telle que $\bar{u} \circ \pi = u$.

Exercice 7 Soit E un e.v.n. réel. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit $f : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue avec $\|f\| = 1$.

(1) On suppose que F est de codimension 1 dans E et on écrit $E = F \oplus \mathbb{R}.x$ avec $x \notin F$. Montrer que
$$\sup_{y\in F}\{-\|y + x\| - f(y)\} \leqslant \inf_{y\in F}\{\|y + x\| - f(y)\}.$$

(2) En déduire qu'il existe une forme linéaire continue $\tilde{f}$ sur E avec $\|\tilde{f}\| = 1$, telle que la restriction de $\tilde{f}$ à F soit f (on choisira $\tilde{f}(x)$ en utilisant a)).

(3) On suppose maintenant que E/F est de dimension finie. Montrer que le résultat de b) vaut encore.

(4) Généraliser le résultat de c) sans supposer que E/F est de dimension finie, en utilisant le lemme de Zorn.

(5) Soit E' l'espace des formes linéaires continues de E dans $\mathbb{R}$, muni de la norme habituelle des applications linéaires continues. On pose $E'' = (E')'$.
   (a) Montrer qu'il existe une injection de E dans E'' qui est une isométrie.
   (b) Montrer que si E est un espace de Hilbert, l'application canonique de E dans son E'' est un isomorphisme.

(6) En déduire qu'il existe un e.v.n. complet $\widetilde{E}$ et une isométrie i de E dans $\widetilde{E}$, telle que $i(E)$ soit dense dans $\widetilde{E}$.

(7) Montrer qu'un tel espace $\widetilde{E}$ est unique à isomorphisme bicontinu près (on l'appelle le *complété* de E).

Exercice 8 Soit H un espace de Hilbert, $F \subset H$ un sous-espace vectoriel fermé, et $p : H \to F$ la projection orthogonale sur F. Démontrer que
$$\langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$$
(on dit que p est *auto-adjoint*).

Exercice 9 Espace pré-hilbertien

(1) Soit H un espace de Hilbert, et $f : H \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Démontrer que $\ker(f)^\perp \neq \{0\}$.

(2) On considère l'espace $c_{00}(\mathbb{N})$ des suites nulles à partir d'un certain rang, et on le munit du produit scalaire
$$\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n.$$
Soit $f : c_{00}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ l'application linéaire définie par
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{n+1}.$$
   (a) Est-ce que $c_{00}(\mathbb{N})$ est un espace de Hilbert ?
   (b) Montrer que f est continue, et que $\ker(f)$ est un hyperplan fermé.
   (c) Montrer que $\ker(f)^\perp = \{0\}$.