Corrigé de l'examen de topologie, L3 magistère

Exercice 1 : Espaces produits et compacité (8 points)

1. Soit A un fermé de $E \times F$. Soit (x_n) une suite d'élements de $p_1(A)$ qui converge vers un $x \in E$, il s'agit de montrer que $x \in p_1(A)$. Par définition de $p_1(A)$, il existe pour tout entier n un $y_n \in F$ tel que $(x_n, y_n) \in A$. Comme F est compact, on peut extraire de (y_n) une suite $(y_{\varphi(n)})$ qui converge vers un $y \in F$. Alors, la suite $(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})$ est à valeurs dans A et converge vers (x, y), ce qui montre (comme A est fermé) que $(x, y) \in A$, d'où $x \in p_1(A)$ (1.5 point).

2. a) Soit y quelconque dans F. Par hypothèse, $(x, y) \notin A$. Comme A est fermé, son complémentaire est ouvert donc il existe un ouvert élémentaire $U_y \times V_y$ de $E \times F$ qui contient (x, y) et ne rencontre pas A, ce qui donne le résultat (1.5 point).

b) Comme F est compact, on peut extraire du recouvrement (V_y) de F un sous-recouvrement fini $(V_{y_i})_{1 \leq i \leq r}$. Posons alors $U = \bigcap_{i=1}^{r} U_{y_i}$, c'est un ouvert de E comme intersection finie d'ouverts. Si $z \in p_1(A)$, alors il existe $y \in F$ tel que $(z, y) \in A$. Comme y est dans l'un des V_{y_i}, z ne peut pas être dans tous les U_{y_i} vu que $U_{y_i} \times V_{y_i}$ ne rencontre pas A. Ainsi, $z \notin U$. Finalement, on a montré que U ne rencontrait pas $p_1(A)$ et il contient x, ce qui donne que le complémentaire de $p_1(A)$ est ouvert comme on voulait (2 points).

3. On sait que la diagonale Δ de Y est un fermé de Y. Or, le graphe de f est l'image réciproque de Δ par l'application continue $(x, y) \mapsto (f(x), y)$ de $X \times Y$ dans lui-même (1 point).

4. Soit G un fermé de F, il s'agit de montrer que $f^{-1}(G)$ est un fermé de E. On observe d'abord que $E \times G$ est un fermé de $E \times F$, car son complémentaire est l'ouvert élémentaire $E \times (F - G)$. L'intersection I de $E \times G$ avec le graphe de f est donc aussi un fermé de $E \times F$, or I est par définition l'ensemble des $(x, f(x))$ avec $f(x) \in G$. D'après 2., la première projection $p_1(I)$ est un fermé de E, or $p_1(I)$ est par définition $f^{-1}(G)$ (2 points).

Exercice 2 : Fonctions continues et exponentielle (8 points)

1. Comme $X \times [0,1]$ est compact, l'application F est uniformément continue. Il en résulte que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous (x_1, t_1) et (x_2, t_2) dans $X \times [0,1]$, les inégalités $d(x_1, x_2) \leq \eta$ et $|t_2 - t_1| \leq \eta$ impliquent $|F(x_2, t_2) - F(x_1, t_1)| \leq \varepsilon$. En particulier, si $|t_2 - t_1| \leq \eta$, on a $|F(x, t_2) - F(x, t_1)| \leq \varepsilon$ pour tout x de X, soit $||\Phi(t_2) - \Phi(t_1)|| \leq \varepsilon$. Finalement, Φ est uniformément continue (1.5 point).

2. a) Soit $h \in C(X)$ avec $||h|| < r$, il s'agit de montrer que $(g + h) \in G$. On observe que $||h/g|| < 1$ car on a pour tout x de X :

$$|\frac{h(x)}{g(x)}| \leq ||h||.|(1/g)(x)| \leq ||h||.||1/g|| < 1.$$

En particulier la partie réelle de $(1 + h/g)(x)$ est > 0 pour tout $x \in X$, ce qui permet de voir que $(1 + h/g) \in G$ en l'écrivant comme exponentielle de $\ln(1 + h/g)$. Alors $g + h = g(1 + h/g)$ est aussi dans G (2 points).

b) Par définition, A_f est l'image réciproque de G par l'application continue $h \mapsto h/f$ de $C^*(X)$ dans $C^*(X)$. D'après b), G est ouvert dans $C^*(X)$ donc A_f l'est aussi. Maintenant, les différents A_f forment une partition de $C^*(X)$ car ce sont les classes selon le sous-groupe G de $C^*(X)$, donc chaque A_f est fermé comme complémentaire de la réunion des autres (2 points).

3. a) On a $f \in A_f$ car $f = f.1$, où la fonction constante 1 est dans G. Du coup, comme $f = \Phi(0)$, on a $0 \in \Phi^{-1}(A_f)$ (0.5 point).

b) Comme Φ est continue d'après 1., 2.c) donne que $\Phi^{-1}(A_f)$ est ouvert et fermé dans $[0,1]$, qui est connexe, d'où $\Phi^{-1}(A_f) = [0,1]$. Comme $\Phi(1) = v$, on obtient $v \in A_f$, ce qui donne le résultat (1 point).

c) Il suffit de poser $F(x,t) = f(x)\exp(th(x))$ (1 point).

Exercice 3 : Espaces de Banach (6 points)

1. a) Le théorème de l'application ouverte dit que $u(B(0,1))$ est ouvert, donc contient une boule ouverte $B(0, 2r)$ avec $r > 0$, ou encore une boule fermée $B_f(0, r)$. Ceci se traduit par le fait que si $||y|| \leq r$, alors y s'écrit $y = u(x)$ avec $||x|| < 1$, d'où le résultat (1 point).

b) Soit $x \in E$, posons $y = u(x)$. On peut supposer $y \neq 0$ (sinon on prend $x' = 0$), alors $\frac{r}{||y||}y$ est de norme r, d'où un z de norme au plus 1 avec $u(z) = \frac{r}{||y||}y$. Posons $x' = z\frac{||y||}{r}$, alors $u(x') = y = u(x)$, et de plus $||x'|| \leq \frac{||y||}{r}$, d'où le résultat. On ne peut par contre pas toujours prendre $x = x'$, il suffit de considérer u non injective et un x non nul tel que $u(x) = 0$ (1.5 point).

2. a) Pour tout x de H, l'ensemble des $f_y(x)$ pour $y \in B_f(0,1)$ est borné car

$$|\langle f(x), y\rangle| \leq ||f(x)||.||y|| \leq ||f(x)||.$$

D'après le théorème de Banach-Steinhaus, il existe $C > 0$ tel que pour tout y de norme ≤ 1, on ait $||f_y|| \leq C$, autrement dit $|\langle f(x), y\rangle| \leq C$ pour tous x, y de norme ≤ 1. En prenant $y = \frac{f(x)}{||f(x)||}$, on obtient $||f(x)|| \leq C$ pour tout x de norme ≤ 1, donc l'application linéaire f est continue (1.5 point).

b) Soit δ_k la suite dont tous les termes valent 0 sauf le k-ième qui vaut 1. Alors $||\delta_k|| = 1$ mais $||u(\delta_k)|| = k$ donc u n'est pas bornée sur la boule unité. Ainsi, u n'est pas continue. Si maintenant $b = (b_n)$ est dans E, elle a presque tous ses termes nuls ; soit m tel que $b_n = 0$ si $n > m$, on a alors pour tout $a = (a_n)$ dans E :

$$\langle u(a), b\rangle = \sum_{n=0}^{m} n a_n b_n,$$

d'où

$$|\langle u(a), b\rangle| \leq m \sum_{n=0}^{m} |a_n||b_n| \leq m \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n||b_n| \leq m||a||.||b||$$

via Cauchy-Schwarz, ce qui montre que la forme linéaire $a \mapsto \langle u(a), b\rangle$ est bornée sur la boule unité, elle est donc continue (2 points).