# Corrigé du partiel de topologie

**Exercice 1 : Espaces irréductibles (12 points)**

**1.** a) En passant au complémentaire dans la définition, on obtient que $X$ est irréductible si et seulement si l'égalité $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, avec $U_1$ et $U_2$ ouverts, implique que $U_1$ ou $U_2$ est vide. C'est donc aussi équivalent à : si $U_1$ et $U_2$ sont des ouverts non vides, alors $U_1 \cap U_2$ est non vide (1 point).

b) Si $X$ a au moins deux éléments $x$ et $y$ avec $x \neq y$, la condition $X$ séparé implique qu'il existe des ouverts $U$ et $V$ de $X$ avec $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V \neq \emptyset$. Alors, $U$ et $V$ sont des ouverts non vides qui ne se rencontrent pas, ce qui contredit $X$ irréductible d'après a) (1 point).

c) Soit $U$ un ouvert non vide de $X$ irréductible. Alors, deux ouverts non vides de $U$ sont encore des ouverts non vides de $X$, donc leur intersection est non vide. Ainsi, $U$ est irréductible (1 point).

d) Soit $U$ un ouvert de $X$, alors si $U$ rencontre $\overline{Y}$, on peut trouver $x \in (U \cap \overline{Y})$. Comme $x \in \overline{Y}$, l'ouvert $U$ qui contient $x$ rencontre aussi $Y$, donc finalement $U \cap Y \neq \emptyset$. Si maintenant $V_1$ et $V_2$ sont deux ouverts non vides de $\overline{Y}$, on a $V_1 = \overline{Y} \cap U_1$ et $V_2 = \overline{Y} \cap U_2$ avec $U_1, U_2$ ouverts de $X$, mais alors comme on l'a vu $U_1$ et $U_2$ rencontrent $Y$, donc $U_1 \cap Y$ et $U_2 \cap Y$ sont des ouverts non vides de $Y$, donc leur intersection est non vide puisque $Y$ est irréductible. Finalement $V_1 \cap V_2$ est bien non vide (1.5 point).

e) Si on écrit $\mathbf{C} = F_1 \cup F_2$ avec $F_1$ et $F_2$ fermés (distincts de $\mathbf{C}$), alors $F_1$ et $F_2$ seraient finis, ce qui n'est pas possible puisque $\mathbf{C}$ est infini (1 point).

**2.** a) Supposons $X$ noethérien. Soit $(F_n)$ une suite décroissante de fermés. Alors, la famille des $F_n$ a un élément minimal, disons $F_N$, et il est alors clair que la suite stationne à $F_N$ puisque les $F_n$ pour $n > N$ ne peuvent pas être strictement inclus dans $F_N$. Réciproquement, supposons que toute suite décroissante de fermés est stationnaire. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille non vide de fermés. On en choisit un $F_1$, s'il n'est pas minimal il contient strictement un autre fermé de la famille $F_2$. Si la famille n'a pas d'élément minimal, on construit par récurrence une suite $(F_n)$ de fermés de cette famille avec $F_n$ contenant strictement $F_{n+1}$ pour tout $n$, d'où une suite strictement décroissante de fermés, contradiction (1.5 point).

b) On utilise le critère de a), qui donne aussi en passant au complémentaire que $X$ est noethérien si et seulement si toute suite croissante d'ouverts est stationnaire. Si $F$ est un fermé de $X$, tout suite décroissante de fermés de $F$ est aussi une suite décroissante de fermés de $X$, donc est stationnaire. Soit $U$ un ouvert de $X$. Alors, toute suite croissante d'ouverts de $U$ est une suite croissante d'ouverts de $X$, donc est stationnaire (1.5 point).

c) Pour la topologie de Zariski, si on prend une famille de fermés, alors ou bien elle est réduite au fermé $\mathbf{C}$ (qui est alors l'élément minimal cherché), ou bien elle contient au moins un fermé fini, auquel cas il suffit de prendre un fermé dont le cardinal est le plus petit dans la famille pour obtenir un élément minimal.

Pour la topologie usuelle, on obtient une suite strictement décroissante $(F_n)$ de fermés en considérant les $[0, 1/n]$ pour $n \in \mathbf{N}^*$ donc d'après a), $\mathbf{C}$ n'est pas noethérien pour cette topologie (1.5 point).

d) Supposons le contraire. On chosit alors un fermé non vide $Y$ minimal parmi ceux qui n'ont pas la propriété voulue. En particulier, $Y$ n'est pas irréductible, donc s'écrit $Y = Y_1 \cup Y_2$, où $Y_1$ et $Y_2$ sont des fermés stricts de $Y$. Par minimalité de $Y$, chacun des $Y_1$ et $Y_2$ s'écrit comme réunion d'un nombre fini de fermés irréductibles, donc c'est aussi le cas de $Y$ qui est leur réunion (2 points).

**Exercice 2 : Vrai ou faux ? (5 points)**

a) C'est vrai. Soit $x \in X$ et $y = f(x)$, alors il existe $i$ tel que $x \in U_i$. Soit $V$ un voisinage de $y$, alors (comme $f_i$ est continue) il existe un voisinage ouvert $U$ de $x$ dans $U_i$ tel que $f(U) \subset V$ ; mais comme $U_i$ est ouvert, $U$ est aussi un ouvert de $X$. Ceci prouve que $f$ est continue en $x$ (1 point).

b) C'est vrai. Supposons que $X$ ne soit pas discret, alors il existe une partie $A$ de $X$ qui n'est pas fermée. Soit $f : X \to \mathbf{R}$ la fonction caractéristique de $A$, alors l'image réciproque du fermé $\{1\}$ de $\mathbf{R}$ est $A$, qui n'est pas un fermé de $X$. Ainsi, $f$ n'est pas continue (1.5 point).

c) C'est faux. Posons $u_n = 0$ si $n$ est pair et $u_n = n$ si $n$ est impair, alors la suite des termes pairs converge vers 0, donc 0 est valeur d'adhérence. Si par contre $a$ est un réel non nul, tous les termes de la suite pour $n > 2|a|$ sont à distance au moins $|a|$ de $a$, donc $a$ n'est pas valeur d'adhérence. Pourtant la suite ne converge pas vu que la suite des termes impairs tend vers $+\infty$ (1 point).

d) C'est faux. Il suffit de prendre une application continue bijective $f$ qui n'est pas un homéomorphisme (il y a des exemples dans le cours). Alors, comme $f^{-1}$ n'est pas continue, il existe un ouvert $U$ de $X$ tel que l'image

réciproque de $U$ par $f^{-1}$, c'est-à-dire $f(U)$, n'est pas un ouvert de $Y$ (1.5 point).

**Exercice 3 : Espaces totalement discontinus (3 points +2 pour le bonus)**

a) Si $A \subset X$ et $X$ est totalement discontinu, alors toute partie connexe de $A$ est aussi une partie connexe de $X$, donc c'est un singleton. Ainsi, $A$ est encore totalement discontinu (0.5 point).

b) Soit $A$ une partie connexe non vide de $X \times Y$. Comme les projections $p_X$ (de $X \times Y$ sur $X$) et $p_Y$ (de $X \times Y$ sur $Y$) sont continues, $p_X(A)$ et $p_Y(A)$ sont des connexes respectifs de $X$ et $Y$, donc ce sont des singletons (disons $\{x\}$ et $\{y\}$), ce qui prouve que $A = \{(x, y)\}$ est forcément un singleton (1.5 point).

c) Avec sa topologie usuelle, $\mathbf{Q}$ est totalement discontinu : en effet, on a vu en cours que les composantes connexes de $\mathbf{Q}$ sont des singletons, donc $\mathbf{Q}$ ne peut contenir de connexe non vide qui aurait au moins deux éléments, sinon ces deux éléments seraient dans la même composante connexe. Pourtant,$\mathbf{Q}$ n'est pas discret : on a vu qu'un singleton n'était pas un ouvert de $\mathbf{Q}$ (1 point).

d) On peut supposer $X$ non vide. Montrons que si $X/\mathcal{R}$ est connexe, il est réduit à un point. Soit $f$ une application continue de $X$ dans l'espace discret $\{0, 1\}$. La restriction de $f$ à toute composante connexe de $X$ est constante, donc (propriété de la topologie quotient) $f$ se factorise en $f = g \circ \pi$, où $g : X/\mathcal{R} \to \{0, 1\}$ est continue et $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ est la surjection canonique. Si $X/\mathcal{R}$ est connexe, alors $g$ est constante, donc $f$ est constante. Ainsi, $X$ est connexe, donc il n'y a qu'une composante connexe et donc $X/\mathcal{R}$ est réduit à un point. Maintenant, si $C$ est une partie connexe non vide de $X/\mathcal{R}$, posons $A = \pi^{-1}(C)$. Alors l'espace quotient $A/\mathcal{R}$ est $C$, il est donc connexe, et par a) on obtient que $A/\mathcal{R} = C$ est un singleton (2 points).