Examen de topologie, L3 magistère (3h)

D. Harari, F. Valet, R. Santharoubane

8 janvier 2026

Tout énoncé vu en cours (mais pas s'il a été vu seulement en TD) peut être utilisé sans démonstration. On peut dans chaque exercice, admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure Le symbole (*) désigne une question a priori plus difficile.

Exercice 1 : Espaces produits et compacité (8 points)

1. Soit E un espace métrique. Soit F un espace métrique compact. Soit $p_1 : E \times F \to E$ la première projection. Montrer que l'image de tout fermé de $E \times F$ par p_1 est un fermé de E (on pourra utiliser des suites).

2. On suppose maintenant que E et F sont des espaces topologiques avec F compact. Soient A un fermé de $E \times F$ et x un élément de E avec $x \notin p_1(A)$.

a) Montrer que pour tout $y \in F$, il existe des ouverts respectifs U_y et V_y de E et F vérifiant : $x \in U_y$, $y \in V_y$ et $(U_y \times V_y) \cap A = \emptyset$.

b) Montrer qu'il existe une famille finie $y_1, ..., y_r$ de points de F tels que $(\bigcap_{i=1}^{r} U_{y_i}) \cap p_1(A) = \emptyset$, et en déduire que la conclusion de 1. vaut encore.

3. Soient X et Y des espaces topologiques avec Y séparé. Montrer que si $f : X \to Y$ est continue, son graphe est fermé dans $X \times Y$.

4. (*) Soient maintenant E et F des espaces topologiques avec F compact. Soit $f : E \to F$ une application dont le graphe est fermé dans $E \times F$. Montrer que f est continue (on pourra commencer par montrer que si G est un fermé de F, alors $E \times G$ est un fermé de $E \times F$, puis utiliser 2.).

Exercice 2 : Fonctions continues et exponentielle (8 points)

Soit X un espace métrique compact. On note $C(X)$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des fonctions continues de X dans $\mathbf{C}$, muni de la norme $||f|| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Soit $C^*(X)$ l'ensemble des fonctions $f \in C(X)$ vérifiant : $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in X$. Si $u \in C(X)$, on note $\exp u$ la fonction $x \mapsto \exp(u(x))$ de X dans $\mathbf{C}$, qui est un élément de $C^*(X)$. On note G l'ensemble des fonctions $f \in C^*(X)$ telles qu'il existe une fonction $u \in C(X)$ vérifiant $f = \exp(u)$. Alors $C^*(X)$

est un groupe commutatif pour la multiplication des fonctions, dont G est un sous-groupe (on ne demande pas de le vérifier). On munit $C^*(X)$ et G de la distance induite par celle de $C(X)$.

1. Soit $F : X \times [0,1] \to \mathbf{C}^*$ une fonction continue. Pour $x \in X, t \in [0,1]$, on pose $(\Phi(t))(x) = F(x,t)$. Montrer que la fonction $\Phi : [0,1] \to C^*(X)$, qui envoie tout $t \in [0,1]$ sur la fonction $\Phi(t)$, est uniformément continue.

2. a) (*) Soit $g \in G$. Soit $r = \frac{1}{||1/g||}$. Montrer que la boule ouverte $B(g,r)$ de $C(X)$ est incluse dans G (on pourra utiliser sans démonstration qu'il existe une fonction continue ln définie sur $\mathbf{C} - \mathbf{R}_-$ telle que $\exp(\ln(z)) = z$ pour tout complexe z qui n'est pas dans $\mathbf{R}_-$).

b) (*) Pour toute $f \in C^*(X)$, on note A_f l'ensemble des éléments de $C^*(X)$ de la forme fg avec $g \in G$. Montrer que A_f est ouvert et fermé dans $C^*(X)$.

3. On se donne $f, v \in C^*(X)$ et on suppose qu'il existe une application continue $F : X \times [0,1] \to \mathbf{C}^*$ vérifiant pour tout $x \in X$: $F(x,0) = f(x)$ et $F(x,1) = v(x)$.

a) Avec les notations de 1., montrer que $\Phi^{-1}(A_f)$ est non vide.

b) Montrer qu'il existe $h \in C(X)$ telle que $\frac{v}{f} = \exp(h)$.

c) Montrer réciproquement que si $f, v \in C^*(X)$ vérifient $\frac{v}{f} = \exp(h)$ avec $h \in C(X)$, alors il existe F comme ci-dessus.

Exercice 3 : Espaces de Banach (6 points)

1. Soit $u : E \to F$ une application linéaire, continue et surjective, où E et F sont des espaces de Banach.

a) Montrer qu'il existe une constante $r > 0$ telle que pour tout $y \in F$ avec $||y|| \leq r$, il existe $x \in E$ vérifiant $||x|| \leq 1$ et $u(x) = y$.

b) En déduire que pour tout $x \in E$, il existe $x' \in E$ vérifiant $u(x) = u(x')$ et $||u(x)|| \geq r||x'||$. Peut-on toujours prendre $x' = x$?

2. (*) a) Soit H un espace de Hilbert réel. Soit $f : H \to H$ une application linéaire. On suppose que pour tout $y \in H$, la forme linéaire $f_y : x \mapsto \langle f(x), y\rangle$ est continue sur H. Montrer que f est continue (on pourra appliquer le théorème de Banach-Steinhaus à la famille des $(f_y)_{||y||\leq 1}$).

b) Soit E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des suites presque nulles $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{R}$. On munit E du produit scalaire $\langle (a_n), (b_n)\rangle = \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n b_n$ et on définit une application linéaire u de E dans E par $u((a_n)) = (na_n)$. Montrer que u n'est pas continue, mais que pour tout $b \in E$, l'application $a \mapsto \langle u(a), b\rangle$ est continue de E dans $\mathbf{R}$.