Partiel de topologie, L3 magistère (3h)

D. Harari, F. Valet, R. Santharoubane

23 octobre 2025

Tout énoncé vu en cours (mais pas s'il a été vu seulement en TD) peut être utilisé sans démonstration. On peut dans chaque exercice, admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure.

Le symbole (*) désigne une question a priori plus difficile.

Exercice 1 : Espaces irréductibles (12 points)

On dit qu'un espace topologique non vide X est *irréductible* si pour toute décomposition $X = F_1 \cup F_2$ avec F_1 et F_2 fermés, on a $F_1 = X$ ou $F_2 = X$. Une partie A de X est dite irréductible si c'est un espace irréductible pour la topologie induite par celle de X.

1. a) Montrer que X (supposé non vide) est irréductible si et seulement si pour tous ouverts non vides U_1, U_2 de X, on a $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

b) Montrer que si X est séparé et n'est pas un singleton, alors X n'est pas irréductible.

c) Montrer qu'un ouvert non vide d'un espace irréductible est encore irréductible.

d) Montrer que si Y est une partie irréductible d'un espace topologique X, alors son adhérence $\overline{Y}$ est encore irréductible.

e) On munit $\mathbf{C}$ de la topologie *de Zariski*, pour laquelle les ouverts sont $\emptyset$ et les parties dont le complémentaire dans $\mathbf{C}$ est fini. Montrer que pour cette topologie, $\mathbf{C}$ est irréductible.

2. On dit qu'un espace topologique X est *noethérien* si toute famille non vide $(F_i)_{i\in I}$ de fermés de X possède un élément minimal pour l'inclusion (c'est-à-dire : il existe $i \in I$ tel qu'aucun des F_j pour $j \in I$ ne soit strictement inclus dans F_i).

a) Montrer que X est noethérien si et seulement si toute suite décroissante (pour l'inclusion) de fermés $(F_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de X est stationnaire, c'est-à-dire : il existe un entier N tel que $F_n = F_N$ pour tout $n \geq N$.

b) Montrer que si X est noethérien, alors tout fermé de X est noethérien, ainsi que tout ouvert.

c) $\mathbf{C}$ est-il noethérien pour la topologie de Zariski ? Pour la topologie usuelle ?

(*) d) Montrer que si X est un espace topologique noethérien, alors tout fermé non vide Y de X s'écrit $Y = \bigcup_{i=1}^{r} Y_i$, où chaque Y_i est un fermé irréductible de X.

Exercice 2 : Vrai ou faux ? (5 points)

Parmi les assertions suivantes, démontrer celles qui sont vraies et donner un contre-exemple pour celles qui sont fausses (on indiquera d'abord si l'assertion est vraie ou fausse).

a) Soient X et Y des espaces topologiques. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de X avec $X = \bigcup_{i\in I} U_i$. Soit $f : X \to Y$ une application. Si la restriction $f_i : U_i \to Y$ de f à U_i est continue pour tout $i \in I$, alors f est continue.

b) Soit X un espace topologique. On suppose que toute application $f : X \to \mathbf{R}$ (où $\mathbf{R}$ est muni de sa topologie usuelle) est continue. Alors, X est un espace topologique discret.

c) Soit X un espace métrique. Si une suite (u_n) d'éléments de X possède une unique valeur d'adhérence, alors elle converge.

d) Si X, Y sont des espaces métriques et si $f : X \to Y$ est une application continue surjective, alors pour tout ouvert U de X, $f(U)$ est un ouvert de Y.

Exercice 3 : Espaces totalement discontinus (3 points)

On dit qu'un espace topologique X est *totalement discontinu* si les seules parties connexes de X sont $\emptyset$ et les singletons.

a) Est-ce que toute partie d'un espace topologique totalement discontinu est encore un espace totalement discontinu (pour la topologie induite) ?

b) Montrer que si X et Y sont deux espaces totalement discontinus, alors $X \times Y$ (muni de la topologie produit) est encore totalement discontinu.

c) Donner un exemple d'espace topologique qui est totalement discontinu mais qui n'est pas discret.

d) (*) **Question bonus (+2 points) :** Soit X un espace topologique. Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence : $x\mathcal{R}y$ si et seulement si x et y sont dans la même composante connexe de X. Montrer que l'espace topologique quotient $X/\mathcal{R}$ est totalement discontinu.