Feuille d'exercices 1 : Topologies et distances

1. Espaces métriques

Exercice 1. Topologie de $\mathbb{R}$, topologie induite.

(1) Dans $\mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle, on considère les ensembles $[0,1]$, $[0,1[$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^\star\}$. Sont-ils ouverts dans $\mathbb{R}$? Sont-ils fermés dans $\mathbb{R}$?

(2) On munit $\mathbb{R}^\star$ de la distance induite par la distance usuelle de $\mathbb{R}$. La partie $]0,1]$ est-elle ouverte dans $\mathbb{R}^\star$? Est-elle fermée dans $\mathbb{R}^\star$?

Exercice 2. Ouverts-fermés de $\mathbb{R}$.
On munit $\mathbb{R}$ de sa topologie usuelle. Soient A une partie non vide, ouverte et fermée de $\mathbb{R}$ et $a \in A$. On note $B = \{b > a \ :\ [a,b] \subset A\}$.

(1) Vérifier que B est non vide.

(2) Montrer que $\sup(B) = +\infty$.

(3) Décrire les parties ouvertes et fermées de $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Comparaison de distances sur $\mathbb{R}^2$.
En utilisant l'identification usuelle du plan $\mathbb{R}^2$ à l'ensemble des nombres complexes, on définit $d(z,z')$ par

- $|z - z'|$ si $\arg(z) = \arg(z') \bmod \pi$,
- $|z| + |z'|$ sinon.

(1) Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}^2$ (on l'appelle la distance SNCF).

(2) Dessiner quelques boules ouvertes pour la distance d.

(3) Soit d_0 la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe des suites qui sont convergentes dans $(\mathbb{R}^2, d_0)$, mais pas dans $(\mathbb{R}^2, d)$.

(4) Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge pour d vers une limite l.

(a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $d(z_n, l) = |z_n - l|$.

(b) En déduire que $(z_n)_n$ converge également pour d_0.

Exercice 4. Boules ouvertes et boules fermées.

(1) Montrer que dans un espace métrique (X,d), toute boule fermée est fermée.

(2) Soient $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, $x \in E$ et $r > 0$. Déterminer l'adhérence dans E de la boule ouverte $B(x,r)$.

(3) Soit $X = [0,1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$. On munit $\mathbb{R}^2$ de la distance d définie par

$$d\left((x,y),(x',y')\right) = \max\left(|x - x'|,\ |y - y'|\right),$$

et X de la distance induite par d (encore notée d). Comparer, dans (X,d), l'adhérence de la boule ouverte de centre $(\frac{1}{2},0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ avec la boule fermée de centre $(\frac{1}{2},0)$ de rayon $\frac{1}{2}$. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 5. Sous-groupes de $\mathbb{R}$.

(1) Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ non réduit à 0. On note $a = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^\star)$.

(a) On suppose que $a = 0$. Montrer alors que G est dense dans $\mathbb{R}$.

(b) On suppose que $a \neq 0$. Montrer que $a \in G$, puis que $G = a\mathbb{Z}$. En déduire que $G \subset \mathbb{R}$ est fermé.

(2) Soient α et β deux réels non nuls et $G = \{m\alpha + n\beta;\ (m,n) \in \mathbb{Z}^2\}$. Donner une condition nécessaire et suffisance sur α et β pour que G soit fermé dans $\mathbb{R}$.

(3) Soient F, $G \subset \mathbb{R}$ deux fermés. L'ensemble $F + G$ est-il fermé dans $\mathbb{R}$?

(4) L'ensemble $\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z}$ est-il fermé ? En déduire

(a) L'adhérence dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble des irrationnels $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$,

(b) L'existence de deux suites d'entiers $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tendent vers $+\infty$ et telles que

$$\lim_{n\to+\infty} (q_n\pi - p_n) = 0.$$

Exercice 6. Valeurs d'adhérence.
Déterminer les valeurs d'adhérence des suites de terme général :

- $u_n = \sin(2n\pi/3) + (-1)^n$,
- $v_n = \cos(2n\pi/3) + \frac{1}{n}$.

Exercice 7. Valeurs d'adhérence II : Le retour.
Soit $(u_n)_n$ une suite réelle telle que

$$\lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0.$$

Montrer que l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est un intervalle.

2. Espaces topologiques

Exercice 8. Zérologie.

(1) Quelles sont la ou les topologies sur l'ensemble vide ?

(2) Quelles sont la ou les topologies sur un ensemble à un élément ?

(3) Quelles sont la ou les topologies sur un ensemble à deux éléments ? Les singletons sont-ils toujours fermés ?

Exercice 9. Une topologie sur $\mathbb{R}$.
On note $\mathcal{T} = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{]a; +\infty[; a \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ dont une des bornes est $+\infty$.

(1) Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Quelle est l'adhérence de $\{x\}$ (c'est-à-dire l'intersection de tous les fermés contenant x) ?

Exercice 10. Changement de distance.
Soit (X, d) un espace métrique. On note $d' = \min(1, d)$.

(1) Montrer que d' est une distance sur X.

(2) Les distances d et d' sont-elles topologiquement équivalentes ?

(3) Les distances d et d' sont-elles Lipschitz équivalentes ?

Exercice 11. Nombres premiers.
Le but de cet exercice est de donner une preuve "topologique" du fait que l'ensemble des nombres premiers est infini.
Pour $\alpha \in \mathbb{Z}^\star$ et $\beta \in \mathbb{Z}$, on pose $S(\alpha, \beta) = \alpha\mathbb{Z} + \beta$. On définit $\mathcal{T}$ comme l'ensemble des réunions de parties de $\mathbb{Z}$ de la forme $S(\alpha, \beta)$, ou $\emptyset$.

(1) Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\mathbb{Z}$.
(2) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}^\star$ et $\beta \in \mathbb{Z}$, l'ensemble $S(\alpha, \beta)$ est fermé.
(3) Montrer qu'aucune partie finie non vide de $\mathbb{Z}$ n'est ouverte.
(4) Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
   (a) Expliciter le complémentaire dans $\mathbb{Z}$ de l'ensemble
   $$X = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} p\mathbb{Z}.$$
   (b) Montrer que X n'est pas fermé, puis conclure.

3. Adhérence, intérieur.

Exercice 12. (1) Dans $\mathbb{R}$, donner (en justifiant brièvement) l'adhérence et l'intérieur des parties suivantes :
   (a) $[1, 2[$.
   (b) $]-1, 1[$.
   (c) $\mathbb{Q}$.
   (d) $\mathbb{Q} \cap]\sqrt{2}, 3]$.
(2) Soit X un ensemble et $A \subset X$. Décrire l'adhérence et l'intérieur de A lorsque :
   (a) X est muni de la topologie grossière,
   (b) X est muni de la topologie discrète.

Exercice 13. Soit X un espace topologique et $A \subset X$.

(1) Si $A = \overline{A}$, que peut-on dire de A ? Et si $A = \mathring{A}$?
(2) Si $X = \mathbb{R}$, et A est borné et non vide, montrer que $\sup(A) = \mathring{A}$.
(3) On munit A de la topologie induite. Si $O \subset A$ est un ouvert, est-ce un ouvert de X ? Et si $F \subset A$ est fermé pour la topologie induite, est-ce un fermé de X ? Pour quels A est-ce le cas ?
(4) Montrer que les fermés de A (pour la topologie induite) sous les parties de la forme $F \cap A$, où F est un fermé de X.
(5) La suite $(x_n)_n$ définie par $x_n = \frac{1}{n}$ est-elle convergente :
   (a) dans $\mathbb{R}$, muni de la topologie usuelle ?
   (b) dans $]0; 1[$, muni de la topologie induite ?
(6) Donner un exemple d'espace topologique non séparé.

Exercice 14. Frontière.
Soit X un espace topologique. Soit $A \subset X$.

(1) Montrer que $\overline{X \backslash A} = X \backslash \mathring{A}$ et $X \backslash \overline{A} = \widehat{X \backslash A}$.
(2) La *frontière* de A est définie par
   $$\partial A = \overline{A} \backslash \mathring{A} = \overline{A} \cap \overline{X \backslash A}.$$

(a) Montrer que ∂A est un fermé de X.
(b) Soit $x \in X$. Montrer que $x \in \partial A$ si et seulement si tout voisinage de x rencontre à la fois A et $X \backslash A$.

4. Exercices optionnels

Exercice 15. Une distance entre suites.
On considère l'ensemble $X = E^{\mathbb{N}^\star}$ des suites à valeurs dans un ensemble E non vide. Pour toutes suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$, on note $I(x, y)$ l'ensemble des indices $n \in \mathbb{N}^\star$ tels que $x_n \neq y_n$ et l'on pose

$$d(x, y) = \begin{cases} 1/\min I(x, y) & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(1) Montrer que d est une distance sur X qui vérifie l'inégalité

$$d(x, z) \leqslant \max\left(d(x, y), d(y, z)\right).$$

À quelle condition a-t-on égalité ?
(2) Décrire les boules ouvertes et les boules fermées pour cette distance. Que remarque-t-on ?
(3) Soit $B(x, r)$ une boule de rayon $r > 0$ et soit $y \in B(x, r)$. Montrer que $B(x, r) = B(y, r)$. Autrement dit, tout point d'une boule est au centre.
(4) En déduire que si deux boules ouvertes ont un point commun, alors l'une est contenue dans l'autre.

Exercice 16. Valeurs d'adhérence III : Le retour de la revanche.
Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite de terme général $u_n = \cos(v_n)$ où

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(1) Rappeler brièvement quelles sont les limites de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(v_{n+1} - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On fixe maintenant un réel $\theta \in [0; 2\pi[$.
(2) Soit $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $N' > N$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que

$$|v_{N'} - \theta - 2m\pi| < \epsilon.$$

(3) Soit maintenant $x \in [-1, 1]$, $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $N' > N$ tel que

$$|u_{N'} - x| < \epsilon.$$

(4) Conclure.

Exercice 17. Adhérence.
Soit A et B deux parties d'un espace topologique X.
(1) Comparer $\overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B}$.
(2) Même question pour $\overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B}$.
(3) Si A est ouvert, montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$. Qu'en est-il si A n'est pas ouvert ?

Exercice 18. Parties denses.
Soit (X, d) un espace métrique et $D \subset X$ un sous-ensemble. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) D est dense dans X (id est $\overline{D} = X$).
(2) Pour tout ouvert non vide U de X, on a $U \cap D \neq \emptyset$.
(3) Le complémentaire de D dans X est d'intérieur vide.
(4) L'espace X est l'unique fermé contenant D.

Exercice 19. Espaces séparés.

(1) Soit X un ensemble et $\mathcal{T}$ l'ensemble des complémentaires de parties finies de X, union $\emptyset$.
   (a) Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur X.
   (b) L'espace $(X, \mathcal{T})$ est-il séparé ?
(2) Reprendre les espaces topologiques définis dans les Exercices 8 et 9. Sont-ils séparés ?

Exercice 20. Partiel 2025/2026.
On dit qu'un espace topologique non vide X est *irréductible* si pour tout décomposition $X = F_1 \cup F_2$ avec F_1 et F_2 fermés, on a $F_1 = X$ ou $F_2 = X$. Une partie A de X est dite irréductible si c'est un espace irréductible pour la topologie induite par celle de X.

(1) (a) Montrer que X (supposé non vide) est irréductible si et seulement si pour tous ouverts non vides U_1, U_2 de X, on a $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.
   (b) Montrer que si X est séparé et n'est pas un singleton, alors X n'est pas irréductible.
   (c) Montrer qu'un ouvert non vide d'un espace irréductible est encore irréductible,
   (d) Montrer que si Y est une partie irréductible d'un espace topologique X, alors son adhérence $\overline{Y}$ est encore irréductible.
   (e) On munit $\mathbb{C}$ de la topologie de *Zariski*, pour laquelle les ouverts sont $\emptyset$ et les parties dont le complémentaire dans $\mathbb{C}$ est fini. Montrer que pour cette topologie, $\mathbb{C}$ est irréductible.
(2) On dit qu'un espace topologique X est *noethérien* si toute famille non vide $(F_i)_{i \in I}$ de fermés de X possède un élément minimal pour l'inclusion (c'est-à-dire : il existe $i \in I$ tel qu'aucun des F_j pour $j \in I$ ne soit strictement inclus dans F_i).
   (a) Montrer que X est noethérien si et seulement si toute suite décroissante (pour l'inclusion) de fermés $(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de X est stationnaire, c'est-à-dire : il existe un entier N tel que $F_n = F_N$ pour tout $n \geqslant N$.
   (b) Montrer que si X est noethérien, alors tout fermé de X est noethérien, ainsi que tout ouvert.
   (c) $\mathbb{C}$ est-il noethérien pour la topologie de Zariski ? Pour la topologie usuelle ?
   (d) (*) Montrer que si X est un espace topologique noethérien, alors tout fermé non vide Y de X s'écrit $Y = \bigcup_{i=1}^{r} Y_i$, où chaque Y_i est un fermé irréductible de X.