Feuille d'exercices 2 : Applications continues, topologie produit

1. Continuité

Exercice 1. Homéomorphismes.

(1) On munit $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ de la distance induite par la distance usuelle de $\mathbb{R}$. Sont-ils homéomorphes ?

(2) Est-ce que $\mathbb{R}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, muni de la topologie induite ?

(3) Montrer que deux intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$ sont homéomorphes.

(4) On munit le cercle unité $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ de la topologie induite et on définit $f : [0,1[\to \mathbb{S}^1$ par $f(t) = e^{2i\pi t}$. Montrer que f est continue et bijective, mais n'est pas un homéomorphisme.

(5) Montrer que l'application $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(s) = \frac{s}{1-|s|}$ est un homéomorphisme.

(6) Montrer que tous les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ sont homéomorphes.

Exercice 2.

(1) Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$. Montrer que si f est strictement croissante et $f(A)$ est ouvert, alors f est continue.

(2) Montrer que toute application monotone bijective entre deux ouverts de $\mathbb{R}$ est un homéomorphisme.

Exercice 3. Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application.

(1) Montrer que f est continue si et seulement si $f^{-1}\left(\mathring{A}\right) \subset \overbrace{f^{-1}(A)}^{\circ}$ pour toute partie $A \subset Y$.

(2) Même question avec $\overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{A})$.

(3) Soient $A, B \subset X$, tels que $\overline{A} = \overline{B}$. Montrer que si f est continue, alors $\overline{f(A)} = \overline{f(B)}$.

Exercice 4. Distance à une partie.
Soient (X,d) un espace métrique et $A \subset X$ non vide. Pour tout $x \in X$, on note

$$d(x,A) := \inf_{y \in A} d(x,y).$$

(1) Montrer que la fonction $x \in X \mapsto d(x,A) \in \mathbb{R}$ est bien définie et 1-lipschitzienne.

(2) Soit $x \in X$. Montrer que $d(x,A) = d(x,\overline{A})$, et que $d(x,A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.

(3) Montrer que tout fermé de X est intersection dénombrable d'ouverts. Qu'en déduit-on par passage au complémentaire ?

(4) Soient A et B deux fermés disjoints de X. Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V de X contenant respectivement A et B.

2. Topologie produit

Exercice 5. Soit X l'ensemble $[0,1]^{[0,1]} = \prod_{x \in [0,1]} [0,1]$, que l'on peut aussi voir comme l'ensemble des applications de $[0,1]$ dans $[0,1]$. On munit cet ensemble de la topologie produit, c'est-à-dire que les ouverts sont les réunions des sous-ensembles de X de la forme $\prod_{x \in [0,1]} U_x$, où U_x est un ouvert de $[0,1]$ et tous les U_x sont égaux à $[0,1]$ à l'exception d'un nombre fini.

(1) Montrer que X est un espace topologique séparé.

(2) Montrer qu'une suite $(f_n)_n$ d'éléments de X (vus comme des applications de $[0,1]$ dans lui-même) converge vers une fonction f si et seulement si $(f_n)_n$ converge simplement vers f au sens usuel.

(3) Soit D le sous-ensemble de X constitué des fonctions à support fini, c'est-à-dire telles que $f(x) = 0$ à l'exception d'un nombre fini de $x \in [0,1]$. Montrer que D est dense dans X.

(4) Montrer que si une suite $(f_n)_n$ d'éléments de D converge vers $f \in X$, alors l'ensemble des points où f ne s'annule pas est (au plus) dénombrable.

(5) En déduire que l'espace X n'est pas métrisable. On peut montrer qu'il est compact (cf. le chapitre 9 du livre de Skandalis).

Exercice 6. Soit $(X_i, d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'espaces métriques.

(1) Montrer que l'expression

$$\delta(x,y) := \sup_{i\in\mathbb{N}} \min\{1, d_i(x_i, y_i)\}$$

définit une distance sur $X = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$.

(2) Décrire les suites convergentes dans (X,δ). Comparer aux suites convergentes pour la topologie produit.

(3) On suppose que tous les facteurs X_i sont égaux à $\{0,1\} \subset \mathbb{R}$. Montrer que la distance δ induit sur X la topologie discrète.

Exercice 7. Topologie quotient.
On note $S = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le quotient de $\mathbb{R}$ par la relation d'équivalence $x \sim x+n$ pour $n \in \mathbb{Z}$. On munit S de la topologie quotient de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 (muni de la topologie induite de la topologie usuelle de $\mathbb{C}$).

(1) Soit $f : S \to \mathbb{U}$ définie par $f(x) = e^{2i\pi x}$. Montrer que f est bien définie, puis que c'est une bijection.

(2) On note $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$ définie par $\phi(x) = e^{2i\pi x}$. Montrer que ϕ est continue et en déduire que f est continue.

(3) Montrer que l'image (directe) d'un ouvert par ϕ est un ouvert. En déduire que f est un homéomorphisme.

3. Exercices optionnels

Exercice 8. Points de continuité d'une fonction.
Soient (X,d) et (Y,δ) deux espace métriques et soit $f : X \to Y$ une fonction. On pose, pour tout $x \in X$,

$$\omega_f(x) := \inf_{r>0} \sup_{y,z\in B(x,r)} \delta(f(y), f(z)).$$

(1) Caractériser la continuité de f en x à l'aide de $\omega_f(x)$.

(2) Montrer que l'ensemble des points de continuité de f est l'intersection d'une suite dénombrable décroissante d'ouverts.

Exercice 9. On munit l'ensemble c des suites réelles convergentes de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par, pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c$,

$$\|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

(1) Soit l l'application qui à une suite associe sa limite. Montrer que l est continue.

(2) En déduire que l'ensemble c_0 des suites qui tendent vers 0 est fermé dans c.

Exercice 10. Partiel 2025-2026.
Vrai ou Faux ? Parmi les assertions suivantes, démontrer celles qui sont vraies et donner un contre-exemple pour celles qui sont fausses.

(1) Soient X et Y des espaces topologiques. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de X avec $X = \bigcup_{i\in I} U_i$. Soit $f : X \to Y$ une application. Si pour tout $i \in I$, la restriction $f_i : U_i \to Y$ de f à U_i est continue, alors f est continue.

(2) Soit X un espace topologique. On suppose que toute application $f : X \to \mathbb{R}$ (où $\mathbb{R}$ est muni de sa topologie usuelle) est continue. Alors, X est un espace topologique discret.

(3) Si X, Y sont des espaces métriques et si $f : X \to Y$ est une application continue surjective, alors pour tout ouvert U de X, $f(U)$ est un ouvert de Y.