Feuille d'exercices 3 : Connexité et connexité par arcs

Exercice 1. Les lettres T et D (munies de la topolgie induite par $\mathbb{R}^2$) sont-elles homéomorphes ?

Exercice 2. Composantes connexes.

(1) Soit $X = \cup_{i\in I} A_i$ un espace topologique qui s'écrit comme réunion disjointe d'ouverts connexes non vides A_i. Décrire les composantes connexes de X.

(2) Soit n un entier et $X = \prod_{1\leq i\leq n} \{0,1\}$, muni de la topologie produit (où $\{0,1\}$ est muni de la topologie discrète). Quelles sont les composantes connexes de X ?

(3) Qu'en est-il si $X = \prod_{i\in\mathbb{N}} \{0,1\}$?

Exercice 3. Adhérence et réunion.
Soient A et B deux parties d'un espace topologique X.

(1) Montrer que si A et B sont connexes et $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$, alors $A \cup B$ est connexe.

(2) Montrer que si A et B sont connexes par arcs et $A \cap B \neq \emptyset$, alors $A \cup B$ est connexe par arcs.

(3) Qu'en est-il de l'intersection ?

Exercice 4. Connexité par lignes polygonales.
Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de sa distance euclidienne naturelle. Une *ligne polygonale* de $\mathbb{R}^2$ est un chemin continu $\gamma : [t, t'] \to \mathbb{R}^2$ tel qu'il existe une subdivision $t = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t'$ pour laquelle la restriction de γ à chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ est affine, donc de la forme

$$\gamma(t) = A_i + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \overrightarrow{A_i A_{i+1}}.$$

Soit U un ouvert connexe non vide de $\mathbb{R}^2$. Montrer que pour deux points $A, B \in U$ quelconques, il existe une ligne polygonale $\gamma : [0,1] \to U$ telle que $\gamma(0) = A$ et $\gamma(1) = B$.
Indication : on pourra fixer un point p_0 dans U et étudier l'ensemble

$$O(p_0) = \{q \in U, \text{ il existe une ligne polygonale } \gamma : [0,1] \to U \text{ telle que } \gamma(0) = p_0 \text{ et } \gamma(1) = q\}.$$

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure usuelle d'espace métrique produit, on considère le sous-ensemble Γ muni de la topologie induite défini par

$$\Gamma = \left\{ \left(t, \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right) ;\ t > 0 \right\}.$$

(1) Montrer que Γ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.

(2) Montrer que $\overline{\Gamma} = (\{0\} \times [-1,1]) \cup \Gamma$.

(3) On va montrer que $\overline{\Gamma}$ est connexe, mais que $\overline{\Gamma}$ n'est pas connexe par arcs. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe un chemin continu $\gamma : [0,1] \to \overline{\Gamma}$ avec $\gamma(0) = (0,0)$ et $\gamma(1) = (1, \sin(1))$. On note $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ de sorte que si $x(t) \neq 0$, alors $y(t) = \sin(1/x(t))$. Soit $t_0 = \sup\{t \geqslant 0 | x(t) = 0\}$ (le dernier instant où le chemin est sur l'axe des ordonnées).

(a) Montrer que $x(t_0) = 0$.

(b) On pose $a = y(t_0)$. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que, si $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \epsilon$, alors $|y(t) - a| \leqslant \frac{1}{2}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}} < x(t_0+\epsilon)$. Montrer qu'il existe $t_1, t_2 \in [t_0, t_0+\epsilon]$ avec $x(t_1) = \frac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}}$ et $x(t_2) = \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$.

(d) Conclure.

Exercices optionnels

Exercice 6. Le passage des douanes.
Soit A une partie d'un espace topologique X. Montrer que si B est une partie connexe de X qui rencontre à la fois $\mathring{A}$ et $X\backslash\overline{A}$, alors B rencontre la frontière de A. On rappelle que la frontière est $\partial A = \overline{A}\backslash\mathring{A}$.

Exercice 7. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On souhaite démontrer à l'aide de la connexité le résultat classique suivant : si f est continue et injective, alors f est strictement monotone. Pour cela, on pose

$$C = \{(x, y) \in I \times I;\ x > y\}$$

et $F(x, y) = f(x) - f(y)$ pour $(x, y) \in C$.

(1) Démontrer que $F(C)$ est un intervalle.

(2) Conclure.

Exercice 8. Connexité dans les espaces de matrices.
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la topologie usuelle.

(1) Est-ce que $GL_n(\mathbb{R})$ est connexe ?

(2) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, et pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$ avec $i \neq j$, on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire de coefficients 1 en position (i, j) et 0 ailleurs, et on note $T_{i,j}(\lambda)$ la matrice de transvection $I_n + \lambda E_{i,j}$. On note également

$$GL_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R});\ \det(M) > 0\}.$$

(a) Montrer qu'il existe un chemin continu de I_n à $T_{i,j}(\lambda)$ dans $SL_n(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que toute matrice de $GL_n^+(\mathbb{R})$ s'écrit comme produit de matrices de transvections et d'une matrice diagonale à coefficients positifs.

(c) En déduire que $GL_n^+(\mathbb{R})$ est connexe.

Exercice 9. Partiel 2025-2026 : Espaces totalement discontinus.
On dit qu'un espace topologique X est *totalement discontinu* si les seules parties connexes de X sont $\emptyset$ et les singletons.

(1) Est-ce que toute partie d'un espace topologique totalement discontinu est encore un espace totalement discontinu (pour la topologie induite) ?

(2) Montrer que si X et Y sont deux espaces totalement discontinus, alors $X \times Y$ (muni de la topologie produit) est encore totalement discontinu.

(3) Donner un exemple d'espace topologique qui est totalement discontinu mais qui n'est pas discret.

(4) (*) Soit X un espace topologique. Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence : $x\mathcal{R}y$ si et seulement si x et y sont dans la même composante connexe de X. Montrer que l'espace topologique quotient $X\backslash\mathcal{R}$ est totalement discontinu.

Exercice 10. Examen 2024-2025 : Espaces localement connexes.
On dit qu'un espace topologique X est *localement connexe* si tout point x de X admet une base de voisinages connexes (autrement dit : tout voisinage U de x contient un voisinage connexe V de x).

(1) Montrer que si X est localement connexe, tout ouvert de X est localement connexe.

(2) Montrer qu'un espace vectoriel normé est localement connexe.

(3) Donner un exemple d'espace topologique localement connexe qui n'est pas connexe.

(4) Montrer que si X est localement connexe et U est un ouvert de X, les composantes connexes de U sont des ouverts de X.

(5) En déduire que si X est localement connexe, tout de point de X admet une base de voisinages à la fois ouverts et connexes de X.

(6) (*) Soit X la partie de $\mathbb{R}^2$ définie comme la réunion de $D := \{0\} \times \mathbb{R}$ et de $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$. Montrer que X (muni de la topologie induite par la topologie usuelle de $\mathbb{R}^2$) est connexe mais n'est pas localement connexe (on pourra regarder les composantes connexes de $X - D$).

Exercice 11. Théorème de Darboux.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On pose

$$A = \{(x, y) \in I \times I;\ x < y\}.$$

(1) Démontrer que A est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.

(2) On pose $g(x, y) := \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$. Montrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.

(3) En déduire que $f'(I)$ est un intervalle.

Exercice 12. Applications localement constantes.
Soit X et Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application. On dit que f est localement constante si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de x sur lequel f est constante.

(1) Montrer que f est localement constante si et seulement si la préimage de tout singleton est ouverte.

(2) On suppose que X est connexe, montrer que toute application localement constante est constante.

Exercice 13. Peigne.
On considère les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$:

$$P_+ = (\mathbb{R} \times \{1\}) \cup \left(\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\} \times [0, 1] \right) \text{ et } P_- = (\mathbb{R} \times \{-1\}) \cup \left(\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \left\{x + \sqrt{2}\right\} \times [-1, 0] \right).$$

(1) Montrer que P_+ et P_- sont connexes par arc.

(2) En déduire que $P_+ \cup P_-$ est connexe.

(3) On veut maintenant montrer que $P_+ \cup P_-$ n'est pas connexe par arcs. Supposons par l'absurde qu'il existe un chemin continu $\gamma : [0, 1] \to P_+ \cup P_-$ tel que $\gamma(0) = (0, 1)$ et $\gamma(1) = (0, -1)$ et posons $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

(a) Soit $s = \sup \{t \in [0, 1],\ \gamma(t) \in P_+\}$. Montrer que $y(s) = 0$.

(b) En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $x([s - \alpha, s + \alpha])$ est réduit à un point.

(c) Conclure.