Feuille d'exercices 4 : Espaces complets et Théorème de Baire - Compacité

1. Espaces complets - Théorème de Baire

Exercice 1. Complété d'un espace métrique
Soit (X, d) un espace métrique. Notons $\mathcal{C}_b(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues bornées de X dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$. On fixe $x_0 \in X$.

(1) Montrer que l'application $\varphi : X \to \mathcal{C}_b(X, \mathbb{R})$ définie par
$$\varphi(x)(y) = d(y, x) - d(y, x_0)$$
est isométrique (elle conserve les distances).

(2) En déduire qu'il existe un espace métrique complet $\widehat{X}$ tel que X est isométrique à une partie dense de $\widehat{X}$. *On dit que $\widehat{X}$ est un complété de X.*

(3) Supposons que Y est un espace métrique complet et que $X \subset Y$ est une partie dense. Montrer qu'il existe une unique isométrie surjective $Y \to \widehat{X}$ qui prolonge $\varphi : X \to \widehat{X}$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que pour tout $x > 0$ on a $\lim_{n\to+\infty} f(nx) = 0$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Indication : on pourra poser, pour $\epsilon > 0$ fixé, $F_n := \{x > 0;\ \forall p \geqslant n,\ |f(px)| \leqslant \epsilon\}$.

2. Espaces compacts

Exercice 3. Des ensembles compacts ?
Pour $d \geqslant 1$, on munit $\mathbb{R}^d$ de sa topologie naturelle, et les parties $A \subset \mathbb{R}^d$ de la topologie induite. Les ensembles suivants sont-ils compacts ?

(1) $\mathbb{Z}$; $\{(1/n, y) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{Z}^*,\ 0 \leqslant y \leqslant 1/n\}$; $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 1\}$.

(2) Les groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{O}(n)$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$.

(3) L'ensemble $\{P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R});\ P^2 = P,\ \mathrm{Ker}(P) \perp \mathrm{Im}(P)\}$ des projecteurs orthogonaux, $\mathbb{R}^n$ étant muni d'une structure euclidienne.

(4) $(*)$ L'ensemble $\{P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R});\ P^2 = P\}$ des projecteurs.

Exercice 4. Une partie compacte.
Soit X un espace topologique séparé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X qui converge vers une limite notée x. Montrer que $\{x_n;\ n \geq 0\} \cup \{x\}$ est une partie compacte de X.

Exercice 5. Distance à une partie II.
Soit (X, d) un espace métrique. On rappelle que si $A \subset X$ et $x \in X$, on note
$$d(x, A) = \inf \{d(x, a);\ a \in A\}.$$

(1) Soit K une partie compacte de X.
   (a) Montrer que pour tout $x \in X$, il existe un point $y \in K$ tel que $d(x, y) = d(x, K)$.
   (b) Supposons que pour chaque $x \in X$, le point qui réalise la distance à K est unique et on note ce point $p(x)$. Montrer alors que l'application " projection" $p : X \to K$ est continue.

(2) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E de dimension n. On note d la distance associée à la norme $\|\cdot\|$.
   (a) Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe $y \in F$ tel que $d(x, F) = d(x, y)$.

(b) Y a-t-il unicité ? *On pourra par exemple travailler dans* $\mathbb{R}^2$ *muni de la norme* $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 6. Soit $f : X \to Y$ une application entre deux espaces métriques.

(1) Montrer que si f est continue alors son graphe $\Gamma_f := \{(x, y) \in X \times Y | y = f(x)\}$ est fermé dans $X \times Y$. La réciproque est-elle vraie en général ?

(2) Montrer réciproquement que si Y est compact et Γ_f est fermé, alors f est continue.

Exercice 7. Soit (X, d) un espace métrique compact.

(1) Montrer que X est séparable, c'est-à-dire qu'il contient une partie au plus dénombrable dense.

(2) Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts non vides de X, deux à deux disjoints. Montrer que I est au plus dénombrable.

Exercice 8. Somme de parties.
Deux parties A et B d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ étant données, on note

$$A + B = \{x + y;\ (x, y) \in A \times B\}\,.$$

(1) Montrer que si A est ouverte, alors $A + B$ est ouverte.

(2) Montrer que si A est fermée et B est compacte, alors $A + B$ est fermée.

(3) Montrer que si A et B sont compactes, alors $A + B$ est compacte.

Exercice 9. Soit (K, d) un espace métrique compact (non vide). Soit $f : K \to K$ telle que pour tous $x \neq y$, on a $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$.

(1) Montrer qu'il existe un unique p tel que $f(p) = p$. *Indication : considérer* $\inf_{x\in X} d(x, f(x))$.

(2) Trouver un exemple de fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie que pour tout $x \neq y \in \mathbb{R}$, on a $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ mais qui n'a pas de point fixe.

Exercices optionnels

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, la suite $(f(kx))_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée. On veut montrer que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, considérons les ensembles $F_N = \{x \geqslant 0;\ \sup_{k\in\mathbb{N}} |f(kx)| \leqslant N\}$.

(1) Montrer que F_N est fermé pour tout N.

(2) Montrer qu'il existe au moins un $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'ensemble F_{N_0} contient un intervalle ouvert non vide de la forme $]a, b[$.

Indication : on utilisera le théorème de Baire.

(3) Montrer que f est bornée par N_0 sur l'intervalle $[A, +\infty[$ où $A = \frac{ab}{b-a}$.

(4) En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 11. Applications propres.
Une application $f : X \to Y$ entre deux espaces topologiques est dite *propre* si pour tout compact K de Y, $f^{-1}(K)$ est un compact de X. On travaillera ici avec une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue.

(1) Montrer que f est propre si et seulement si $\|f(x)\| \to +\infty$ lorsque $\|x\| \to +\infty$.

(2) On suppose que f est propre. Montrer que f est fermée (i.e. l'image directe de tout ensemble fermé est un fermé).

Exercice 12. Une partie compacte de $l^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$.
Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dénombrable de nombres réels positifs et $K_\alpha \subset l^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ défini par

$$K_\alpha = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2;\ |u_n| \leqslant \alpha_n\right\}.$$

Montrer que K_α est compact si et seulement si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$.

Exercice 13. Soit $D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$ le disque unité ouvert et soit $K \subset D$ un compact.

(1) Montrer qu'il existe un compact L avec $K \subset L \subset D$ tel que $D\backslash L$ est connexe.
(2) Soit $A = \{z \in \mathbb{C};\ 1 < |z| < 2\}$ un anneau ouvert. Les espaces topologiques D et A sont-ils homéomorphes ?

Exercice 14. Applications ouvertes, applications fermées.
Soient X et Y deux espaces topologiques. Une application $f : X \to Y$ est dite *ouverte* si l'image de tout ouvert est un ouvert et *fermée* si l'image de tout fermé est un fermé.

(1) Montrer que toute application polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est fermée.
(2) Montrer que l'application $p : (x, y) \in X \times Y \mapsto x \in X$ est ouverte. Est-elle fermée ?
(3) Construire une application surjective, ouverte et fermée mais non continue.
(4) Montrer que toute application continue ouverte de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est monotone.

Exercice 15. On munit $E = \mathbb{R}^n$ d'un produit scalaire noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Soit $f : E \to E$ une application linéaire inversible. On suppose que

- Pour tout $x \in E$, si $x \neq 0$, alors $\langle f(x), x\rangle \neq 0$;
- Il existe un $x_0 \in E$ tel que $\langle f(x_0), x_0\rangle > 0$.

Montrer qu'il existe un r tel que pour tout $x \in E$, $\langle f(x), x\rangle \geqslant r\|x\|^2$.

Exercice 16. On se propose de montrer que toutes les normes sont équivalentes sur un K-espace vectoriel de dimension finie (ici $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) sans utiliser la compacité. L'avantage de cette méthode est qu'elle s'étend à tout corps de base muni d'une valeur absolue dès qu'il est complet pour cette valeur absolue et pas forcément localement compact, par exemple $K = k((T))$ où k est un corps, muni de la valeur absolue $|F| = e^{-v(F)}$, où $v(F)$ est la valuation (au sens usuel)de la série de Laurent formelle F. Ce corps n'est pas localement compact si k est infini.
Dans toute la suite, on considère un K-espace vectoriel E de dimension finie $d \geq 1$. On va montrer par récurrence sur d que toutes les normes sur E sont équivalentes.

(1) Montrer qu'on peut se ramener à montrer que toutes les normes sur K^d sont équivalentes à la norme $\|.\|_\infty$ (la norme sup).
(2) Montrer que K^d est complet pour $\|.\|_\infty$
(3) Vérifier le résultat pour $d = 1$.

On suppose désormais le résultat démontré pour un espace de dimension d, et on va le montrer pour K^{d+1}, dont on note $(e_1, ..., e_{d+1})$ la base canonique. Soit $\|.\|$ une norme quelconque sur $E = K^{d+1}$. On note H l'hyperplan de E engendré par $(e_1, ..., e_d)$.

(4) Montrer que H est un sous-espace fermé de E pour $\|.\|$.
(5) Montrer que la projection p de E sur $K.e_{d+1}$ parallèlement à H est continue pour $\|.\|$ (on pourra raisonner par l'absurde en utilisant des suites, ou encore remarquer que $d(e_{d+1}, H) > 0$).
(6) Conclure en appliquant l'hypothèse de récurrence.
(7) On considère le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $V = \mathbf{Q}(\sqrt{2})$, qui est de dimension 2 sur $\mathbf{Q}$. Tout élément de V s'écrit d'une manière unique $x = a + b\sqrt{2}$ avec $(a, b) \in \mathbf{Q}$. Montrer que la valeur absolue usuelle $|.|$ et l'application définie par $N(x) = \max(|a|, |b|)$ sont deux normes non équivalentes sur V.