Feuille d'exercices 5 : Espaces complets, espaces de Banach

1. Espaces complets et espaces de Banach

Exercice 1. Boules fermées emboîtées.
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Pour tout entier $j \geqslant 0$, soit a_j un point de E et soit r_j un réel positif. Soit B_f^j la boule fermée de centre a_j et de rayon r_j. On suppose que la suite $(B_f^j)_{j\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion. Montrer qu'il existe $a \in E$ et $r \geqslant 0$ tels que

$$\bigcap_{j=0}^{+\infty} B_f^j = B_f(a, r).$$

On pourra montrer dans un premier temps que la suite $(r_j)_j$ est décroissante, et deuxièmement que la suite $(a_j)_j$ est de Cauchy.

Exercice 2. Précompacité et complétude.
Soit E un espace métrique.

(1) Montrer que si toute suite de E admet une sous-suite de Cauchy, alors E est précompact.

(2) On se propose de montrer la réciproque. On suppose que E précompact, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.

   (a) Montrer qu'on peut construire une suite $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ d'applications strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, tous les termes de la suite $x_{(\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_k)(n)}$ soient contenus dans une boule de rayon $1/k$.

   (b) On pose $\theta(n) = (\varphi_1\circ\ldots\varphi_n)(n)$. Montrer que la suite $x_{\theta(n)}$ est de Cauchy, et conclure.

(3) Montrer que E est compact si et seulement s'il est précompact et complet.

Exercice 3. Applications uniformément continues.
Soit (E, d) et $(F, \tilde{d})$ deux espaces métriques. Soit une application $f : E \to F$.

(1) On suppose que f est uniformément continue. Montrer que pour toutes suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ de E, si la suite de terme général $d(x_n, y_n)$ tend vers 0 alors la suite de terme général $\tilde{d}(f(x_n), f(y_n))$ tend vers 0.

(2) On suppose réciproquement que pour toutes suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ d'éléments de E, si la suite de terme général $d(x_n, y_n)$ tend vers 0, alors la suite $\tilde{d}(f(x_n), f(y_n))$ converge vers 0. Montrer que f est uniformément continue.

(3) La fonction $f : x \in]0; 1] \mapsto \ln(x) \in \mathbb{R}$ est-elle uniformément continue ?

Exercice 4. Fonction sans point fixe.
Donner un exemple d'espace complet (E, d) et de fonction $f : E \to E$ qui satisfait, pour tout $x, y \in E$, $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, mais qui n'admet pas de point fixe.

2. Applications linéaires continues sur des espaces vectoriels normés

Exercice 5. Soit E un espace de Banach, et $T : E \to E$ une application linéaire continue. Montrer que si $|||Id - T||| < 1$, alors T est inversible (autrement dit, il existe une application linéaire continue $U : E \to E$ telle que $T \circ U = U \circ T = Id$).

Exercice 6. Soit $E = \mathcal{C}([0,1] : \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Pour $\varphi \in E$, notons $T_\varphi : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$T_\varphi(f) := \int_0^1 \varphi(t) f(t) dt.$$

(1) Montrer que T_φ est une forme linéaire continue sur E.

(2) Si $\varphi > 0$, calculer la norme de T_φ. Existe-t-il $f \in E$ de norme 1 tel que $|T_\varphi(f)| = |||T_\varphi|||$?

(3) Si $\varphi(x) = \cos(\pi x)$, calculer la norme de T_φ. Existe-t-il $f \in E$ de norme 1 tel que $|T_\varphi(f)| = |||T_\varphi|||$?

Exercice 7. Dual de l^p.
Pour un réel $p > 1$, on note

$$l^p = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}};\ \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p < +\infty \right\}$$

et on pose, pour $u \in l^p$,

$$\|u\|_p := \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^p \right)^{1/p}.$$

On rappelle que $(l^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach. Le but de cet exercice est de décrire le dual topologique $l^{p\prime}$ de cet espace.
Soit q défini par la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On rappelle l'inégalité de Hölder : pour tout $u \in l^p$, $v \in l^q$, la série de terme général $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument convergente et

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n v_n| \leqslant \|u\|_p \|v\|_q.$$

(1) Soit $v \in l^q$. Montrer que l'application

$$T_v : u \in l^p \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n u_n \in \mathbb{C}$$

est bien définie, est une forme linéaire continue sur l^p, et déterminer sa norme.

(2) Soit T une forme linéaire continue sur l^p. On va montrer qu'il existe $v \in l^q$ tel que $T = T_v$. Pour $j \in \mathbb{N}$, on définit la suite $e(j) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ par $e(j)_i = 1$ si $i = j$ et $e(j)_i = 0$ sinon. Pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $N \in \mathbb{N}$, on note

$$u^N := (u_n \mathbf{1}_{n\leqslant N})_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{j=0}^{N} u_j e(j).$$

(a) Soit $j \in \mathbb{N}$. On pose alors $v_j = T(e(j))$, montrer que $\|v^N\|_q \leqslant |||T|||$ pour tout N, puis montrer que la suite $v = (v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ appartient à l^q.

(b) Soit $u \in l^p$. Montrer que $(u^N)_{N\in\mathbb{N}}$ tend vers u dans l^p et en déduire que $T = T_v$.

Exercice 8. Espaces précompacts.
Soit (A, d) un espace métrique. On dit que A est précompact si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a_1, \cdots, a_n \in A$ tels que

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} B_f(a_i, \varepsilon).$$

(1) Expliquer pourquoi si A est compact, alors A est précompact.

(2) Supposons que A est à la fois complet et précompact. On veut montrer que A est compact.

(a) Montrer que A est borné. Quitte à multiplier la distance d par un scalaire bien choisi, nous supposerons donc que $A = B(x_0, 1)$, pour un certain $x_0 \in A$.

(b) Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de A. Supposons que $(O_i)_{i\in I}$ n'admette aucun sous-recouvrement fini. Démontrer que l'on peut définir par récurrence une suite de boules fermées $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(i) B_n est de rayon 2^{-n},

(ii) B_n n'est pas recouverte par un sous-recouvrement fini de $(O_i)_{i\in I}$,

(iii) Le centre x_{n+1} de B_{n+1} est dans B_n.

(c) Prouver que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, et qu'elle admet une limite $a \in A$.

(d) Montrer qu'il existe j tel que, pour n assez grand on ait $B_n \subset O_j$ et conclure.

(3) Soit E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $(\frac{u_n}{n+1})$ est bornée. On définit, pour $u \in E$,

$$\|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1}|u_n|.$$

(a) Vérifier que E est un espace de Banach.

(b) Soit A le sous-ensemble de E formé des suites à valeurs dans $[0, 1]$. Montrer que A est précompact. En déduire qu'il est compact.

Exercice 9. Soit E un e.v.n. sur $\mathbb{R}$. Soit F un sous-espace vectoriel fermé de E. Pour tout x de E, on note $\overline{x}$ sa classe dans le quotient E/F, et on pose

$$N(\overline{x}) = \inf_{f\in F} \|x + f\|.$$

(1) Montrer que N est une norme sur E/F. Que se passe-t-il si F n'est pas fermé ?

(2) Soit π la projection canonique de E dans E/F. Montrer que π est continue si E/F est munie de la norme N.

(3) Soit u une application linéaire continue de E dans un e.v.n. G. On suppose $F \subset \mathrm{Ker}(u)$. Montrer qu'il existe une unique application linéaire continue $\overline{u}$ de E/F (muni de la norme N) dans G telle que $\overline{u} \circ \pi = u$.