Exercices pour les vacances de la Toussaint

D. Harari

24 octobre 2026

(*)=question plus difficile.

Exercice 1 : Boules dans un e.v.n.

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

a) Montrer que l'adhérence d'une boule ouverte $B(a,r)$ est la boule fermée $B_f(a,r)$.

b) Montrer que l'intérieur d'une boule fermée $B_f(a,r)$ est la boule ouverte $B(a,r)$.

c) Montrer que a) et b) peuvent être faux dans un espace métrique quelconque. A-t-on quand même toujours certaines inclusions ?

Exercice 2 : Espaces à base dénombrable

On dit qu'un espace topologique X est *à base dénombrable* s'il existe une famille dénombrable $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'ouverts de X qui en constitue une base (c'est-à-dire que pour tout $x \in X$ et tout voisinage V de x, il existe un $n \in \mathbf{N}$ tel que $\{x\} \subset U_n \subset V$).

1. a) Montrer que si X est à base dénombrable, toute partie de X (munie de la topologie induite) est à base dénombrable.

b) Montrer que le produit de deux espaces topologiques à base dénombrable est encore à base dénombrable (on rappelle que si E et F sont des ensembles dénombrables, alors le produit $E \times F$ est dénombrable).

c) Montrer que si X est à base dénombrable, alors il existe une partie dénombrable A de X qui est dense (c'est-à-dire telle que $\overline{A} = X$).

d) (*) Montrer que si X est un espace métrique qui possède une partie dénombrable dense A, alors X est à base dénombrable (on pourra commencer par observer que si $x, y \in X$ vérifient $d(x,y) \leq \frac{1}{2m}$ avec $m \in \mathbf{N}^*$, alors $B(y, \frac{1}{2m}) \subset B(x, \frac{1}{m})$, et appliquer cela à $y \in A$).

2. a) Montrer qu'on définit une topologie $\mathcal{T}$ sur $\mathbf{R}$ en prenant comme ouverts : $\emptyset$, $\mathbf{R}$, et les réunions de parties du type $[a,b[$ avec a et b réels vérifiant $a < b$.

b) Montrer que l'espace topologique $X := (\mathbf{R}, \mathcal{T})$ admet une partie dénombrable dense.

c) On munit $X \times X$ de la topologie produit. Montrer que la topologie induite par $X \times X$ sur la droite $D = \{(x, -x), x \in \mathbf{R}\}$ est la topologie discrète.

d) (*) En déduire que X n'est pas à base dénombrable.

Exercice 3 : Espaces localement connexes

On dit qu'un espace topologique X est *localement connexe* si tout point x de X admet une base de voisinages connexes (autrement dit : tout voisinage U de x contient un voisinage connexe V de x).

a) Montrer que si X est localement connexe, tout ouvert de X est localement connexe.

b) Montrer qu'un espace vectoriel normé est localement connexe.

c) Donner un exemple d'espace topologique localement connexe qui n'est pas connexe.

d) Montrer que si X est localement connexe et U est un ouvert de X, les composantes connexes de U sont des ouverts de X.

e) En déduire que si X est localement connexe, tout point de X admet une base de voisinages à la fois ouverts et connexes de X.

f) (*) Soit X la partie de $\mathbf{R}^2$ définie comme la réunion de $D := \{0\} \times \mathbf{R}$ et de $\mathbf{R} \times \mathbf{Q}$. Montrer que X (muni de la topologie induite par la topologie usuelle de $\mathbf{R}^2$) est connexe mais n'est pas localement connexe (on pourra regarder les composantes connexes de $X - D$).

Exercice 4 : Caractérisation d'une boule ouverte

Soit E un espace vectoriel normé complet. Soit B une partie non vide et bornée de E. On suppose que pour tous points x, y de B, il existe une boule ouverte de E incluse dans B qui contient x et y. On note d la distance sur E induite par la norme, soit $d(a, b) = ||a - b||$ pour tous $a, b \in E$.

a) Montrer que l'ensemble des $r > 0$ tels que B contienne une boule ouverte de E de rayon r est non vide et majoré. On note R sa borne supérieure.

b) Montrer qu'il existe une suite $B_n = B(x_n, r_n)$ de boules ouvertes de E incluses dans B avec (r_n) tendant vers R.

c) Montrer que si $x_i \neq x_j$ (avec $i, j \in \mathbf{N}^*$), alors le diamètre de $B_i \cup B_j$ est au moins $r_i + r_j + d(x_i, x_j)$.

d) En déduire que $r_i + r_j + d(x_i, x_j) \leq 2R$, puis que la suite (x_n) converge. On note x sa limite.

e) Montrer que $B(x,R) \subset B$ (on pourra comparer $B(x,r)$ à B_n pour $r < R$ et n assez grand).

f) (*) Montrer que $B \subset B_f(x,R)$ (on pourra, pour z tel que $d(x,z) > R$, considérer u bien choisi sur la droite (xz)).

g) En déduire que $B = B(x,R)$ (on pourra utiliser l'exercice 1,. b) .

Exercice 5 : Groupes topologiques

Soit G un groupe topologique, dont la loi est notée multiplicativement.

1. a) Montrer que l'application $(x,y) \mapsto x^{-1}y$ est continue de $G \times G$ dans G.

b) En déduire que pour tout voisinage V de 1, il existe un voisinage ouvert U de 1 tel que $U^{-1}U \subset V$, où $U^{-1}U$ désigne l'ensemble des $x^{-1}y$ avec $x, y \in U$.

2. Soit X un espace topologique. On dit qu'une famille de parties $(A_i)_{i\in I}$ de X est *localement finie* si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de X tel que l'ensemble des $i \in I$ vérifiant $(V \cap A_i) \neq \emptyset$ soit fini. Montrer que si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille localement finie de fermés de X, alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est un fermé de X.

3. Soit G un groupe topologique séparé. Soit H un sous-groupe de G, que l'on suppose discret pour la topologie induite. On se propose de montrer que H est un fermé de G.

a) Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de 1 tel que $V \cap H = \{1\}$.

b) Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de 1 avec $(U^{-1}U) \cap H = \{1\}$.

c) Soit $x \in G$. On note $xU := \{xu, u \in U\}$. Montrer que xU est un voisinage ouvert de x dans G, tel que xU ne puisse pas contenir deux éléments distincts de H.

d) (*) En déduire que la famille $(\{h\})_{h\in H}$ est localement finie, et conclure.

4. a) Réciproquement, est-ce que tout sous-groupe fermé d'un groupe topologique G est toujours discret ?

b) Soit A un sous-ensemble (pas forcément un sous-groupe) d'un groupe topologique G. On suppose que A est discret, est-ce que A est toujours fermé dans G ?