# Construction analytique d'instantons gravitationels ALF diédraux
# Exposé du 7 février 2013

Hugues AUVRAY

**Résumé**

On traite dans cet exposé d'une construction analytique d'instantons gravitationnels ALF (*Asymptotically Locally Flat*), ou variétés complètes de dimension 4, hyperkählériennes, à croissance cubique du volume. On donne la construction d'instantons ALF diédraux, mal connus par contraste avec leurs homologues cycliques, récemment classifiés.

Nous verrons en particulier comment le traitement d'une équation de Monge-Ampère complexe, donné pour des variétés kählériennes ALF assez générales, nous permet sur nos exemples de corriger un prototype simple pour obtenir la métrique hyperkählérienne recherchée.

## 1 Introduction

Commençons par définir les *instantons gravitationnels* du titre :

**Définition 1.1** *On appelle* instanton gravitationnel *une variété riemannienne* $(M, g)$ *hyperkählérienne, de dimension réelle 4, complète, et dont le tenseur de courbure vérifie une certaine condition de décroissance à l'infini (typiquement,* $\mathrm{Rm}^g$ *est* $L^2$ *pour une certaine mesure pondérée, où la pondération tient compte de la croissance du volume des boules à l'infini).*

Pour mémoire, est *hyperkählérienne* une métrique qui est *kählérienne pour trois structures complexes,* $I, J, K$ *disons, vérifiant les relations de quaternions, i.e.* $IJK = -1$.

Cette condition implique l'*annulation du tenseur de Ricci* ; réciproquement, sur une variété simplement connexe, une métrique kählérienne Ricci-plate est hyperkählérienne.

*Motivation.* — Les instantons gravitationnels sont issus de la physique théorique ; ils ont été introduits par Hawking [Haw] comme blocs élémentaires en Gravité quantique. Ils apparaissent plus récemment en théorie des cordes, voir par exemple [CK, CH].

D'un point de vue plus interne à la géométrie différentielle, un intérêt à étudier de tels objets réside en leur apparition comme limites après changement d'échelle – on parle de « processus d'éclatement » – de familles de métriques d'Einstein en dimension 4.

Revenons sur l'annulation du tenseur de Ricci évoquée plus haut. Lorsque tel est le cas, le théorème de Bishop-Gromov implique une croissance du volume des boules au plus euclidienne ; autrement dit, si $x_0 \in M$, le volume de $B(x_0, r)$ est au plus $cr^4$, avec $c$ le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^4$. Lorsque cette borne est effective (on a une borne inférieure analogue), on parle alors d'*instantons gravitationnels ALE*, pour *Asymptotiquement Localement Euclidiens*. Ces variétés sont bien comprises : elles sont totalement classifiées par Kronheimer [Kro2], qui en donne de plus une construction explicite par quotient hyperkählérien [Kro1]. Leur topologie est celle d'une résolution minimale $\mathbb{C}^2/\Gamma$ avec $\Gamma$ sous-groupe fini de $\mathrm{SU}(2)$.

Lorsque la borne en $r^4$ n'est pas atteinte, on passe directement à une borne en $r^3$ (résultat de V. Minerbe [Min1]). Si cette nouvelle borne est effective, on parle d'*instantons gravitationnels ALF*, pour *Asymptotically Locally Flat*, au sens où :

**Théorème 1.2 (Minerbe [Min1])** *Hors d'un compact, $M$ est l'espace total d'une fibration en cercles $\pi$ au-dessus de $\mathbb{R}^3$ ou de $\mathbb{R}^3/\pm$ moins une boule. De plus, la longueur des fibres tend vers une constante $L > 0$ à l'infini, et la métrique est asymptote à $\pi^* g_{\mathbb{R}^3} + \eta^2$, avec $\eta$ une 1-forme de connexion pour $\pi$.*

**Exemple 1.3 (La métrique de Taub-NUT sur $(\mathbb{C}^2, I)$)** *On reprend une description due à LeBrun [LeB] : étant donné un paramètre $m > 0$, on a une fibration en cercles $\pi = (y_1, y_2, y_3) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^3$ hors des origines, avec $y_1 = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$, où $u$ et $v$ sont définies par*

$$|z_1| = e^{m(u^2-v^2)}u, \qquad |z_2| = e^{m(v^2-u^2)}v,$$

*et $y_2 + iy_3 = iz_1 z_2$. Si l'on pose encore $V = \frac{1+4mR}{2R}$, avec $R = \frac{u^2+v^2}{2}$, alors $\eta := VIdy_1$ est une 1-forme de connexion pour $\pi$, et*

$$h_m := V(dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2) + V^{-1}\eta^2 \tag{1}$$

*est une métrique kählérienne pour $I$, de même volume forme que la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^4$, et donc Ricci-plate.*

Dans le théorème 1.2, deux situations dont possibles pour les instantons gravitationels ALF :

1. on a à l'infini une fibration au-dessus de $\mathbb{R}^3$ : c'est le cas *cyclique* ; ces instantons sont classifiés par Minerbe [Min2], et on en a une description particulièrement explicite par l'*ansatz de Gibbons-Hawking* [GH] ;
2. la fibration à l'infini est au-dessus de $\mathbb{R}^3/\pm$ : c'est le cas *diédral* ; une classification est dans ce cas conjecturée, qui entend mimer celle des instantons ALE diédraux (de même que dans le cas cyclique) ; on n'a en général pas, par ailleurs, les symétries autorisant une description aussi élémentaire que dans le cas précédent.

C'est donc pour mieux comprendre la transition entre géométries ALE et ALF des instantons, en particulier diédraux, qui semble être au cœur de la classification évoquée, que j'ai entrepris une construction analytique directe des instantons ALF diédraux à partir des instantons ALE diédraux. Mentionnons néanmoins ici les constructions précédentes par Cherkis-Kapustin [CK] et Cherkis-Hitchin [CH], qui utilisent des méthodes twistorielles ; la classification espérée paraît cependant ici nécessaire pour affirmer que les variétés qu'ils construisent, et celles proposées dans cet exposé, sont bien les mêmes.

# 2 Résultats

**Définition 2.1 (Groupe binaire diédral)** *Soit $k \geq 2$. On appelle* groupe binaire diédral d'ordre $4k$*, et l'on note $\mathcal{D}_k$, le sous-groupe fini de* $\mathrm{SU}(\mathbb{C})$ *engendré par les matrices $\tau := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\zeta_k := \begin{pmatrix} e^{i\pi/k} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/k} \end{pmatrix}$.*

**Remarque 2.2** *Pour tout $m > 0$, la métrique $h_m$ de l'exemple 1.3 est invariante sous $\mathcal{D}_k$.*

On se donne un instanton gravitationnel ALE $\big(X, g_0, I_1, I_2, I_3\big)$ ; d'après Kronheimer, c'est une *déformation* de l'orbifold $\big(\mathbb{C}^2/\mathcal{D}_k, I, J, K\big)$, difféomorphe à la résolution minimale de $\big(\mathbb{C}^2/\mathcal{D}_k, I\big)$. On a en particulier un difféomorphisme $\Phi$ entre les infinis de $X$ et $\mathbb{C}^2/\mathcal{D}_k$, sous lequel $g_0$ est asymptotiquement euclidienne, et $I_1$ (*resp.* $I_2, I_3$) est asymptote à $I$ (*resp.* $J, K$).

La construction que je propose donne :

**Théorème 2.3 (A. [A1, A2])** *On peut choisir le difféomorphisme $\Phi$ ci-dessus de sorte que pour tout $m > 0$, il existe une métrique $g_m$ hyperkählérienne pour un triplet $(J_1^m, J_2^m, J_3^m)$, asymptote à $h_m$ via $\Phi$, et telle que $g_m(J_j^m \cdot, \cdot)$ soit cohomologue à $g_0(I_j \cdot, \cdot)$, $j = 1, 2, 3$.*

Pour démontrer ce résultat, j'utilise ce second énoncé :

**Théorème 2.4 (A. [A1])** *Soit* $(Y, g_Y, J_Y, \omega_Y)$ *une* variété kählérienne ALF diédrale. *Soit* $f$ *une fonction lisse sur* $Y$ *telle que pour un* $\beta \in (0,1)$, $\nabla^j f = O\big(\rho^{-\beta-j-2}\big)$ *pour tout* $j \geq 0$. *Alors il existe* $\varphi$ *lisse sur* $Y$ *telle que* $\nabla^j \varphi = O\big(\rho^{-\beta-j}\big)$ *pour tout* $j \geq 0$, *vérifiant l'équation*

$$\big(\omega_Y + dd^c\varphi\big)^2 = e^f \omega_Y^2. \tag{2}$$

*Commentaires sur le théorème 2.4.* — Précisons pour commencer le vocabulaire ; « variété kählérienne ALF diédrale » reprend la terminologie du théorème 1.2, cas $\mathbb{R}^3/\pm$, en demandant de plus, si $\pi = (y_1, y_2, y_3)$, la condition de compatibilité entre structures kählérienne et ALF : $J_Y dy_1 \sim \eta$, $J_Y dy_2 \sim dy_3$. Par ailleurs, la fonction $\rho$ de l'énoncé est une fonction distance à un point donné.

Mentionnons ensuite que l'équation (2) est une *équation de type Monge-Ampère*, très usuelle en géométrie kählérienne : résoudre cette équation permet en effet de construire des métriques kählériennes à courbure de Ricci prescrite.

Ajoutons enfin que ce résultat est à rapprocher d'un théorème de même nature de H. J. Hein [Hei], plus général mais moins précis dans les asymptotiques, qui me sont nécessaires dans le théorème 2.3 pour affirmer que « $g_m$ est asymptote à $h_m$ ».

# 3 Démonstrations

## 3.1 Démonstration du théorème 2.3

On commence par le cas où $(X, I_1)$ est une *résolution minimale* de $\big(\mathbb{C}^2/\mathcal{D}_k, I\big)$, de sorte que l'on puisse supposer que le difféomorphisme à l'infini $\Phi$ est holomorphe pour le couple $(I, I_1)$ ; en supposant les voisinage de $X$ et de $\mathbb{C}^2/\mathcal{D}_k$ ainsi identifiés, on a donc $I_1 = I$.

L'idée naturelle est alors de recoller, *via* les potentiels, $h_m$ à $g_0$, avant de corriger la métrique $I_1$-kählérienne obtenue en une métrique hyperkählérienne. Notons que les géométries très différentes de $h_m$ et $g_0$ (ou de la métrique euclidienne sur $\mathbb{C}^2/\mathcal{D}_k$) nous empêchent de faire ce recollement à Ricci proche de 0, ce pourquoi nous utilisons le théorème 2.4, qui n'est pas de nature perturbative. On procède en trois étapes :

1. soient $\omega_0 := g_0(I_1\cdot, \cdot)$, $\omega_m := h_m(I\cdot, \cdot)$ ; soit encore $\varphi_m$ un potentiel pour $h_m$, également donné dans [LeB]. À l'aide de fonctions de coupure, on construit une forme symplectique $I_1$-hermitienne $\tilde{\omega}_m$ de la forme $\tilde{\omega}_m = \omega_0 + dd^c\tilde{\varphi}_m$, où $\tilde{\varphi}_m$ est obtenu à partir de $\varphi_m$.

On peut ajuster judicieusement les paramètres de la construction de sorte que $\tilde{\omega}_m > 0$ au sens des (1,1)-formes $I_1$-hermitiennes, et que $\nabla^j_{h_m}\big(\tilde{\omega}_m - \omega_m\big) = O(R^{-3})$ pour $j = 0, \ldots, 3$, où $R$ est une fonction distance pour $h_m$.

2. on améliore la régularité du prototype $\tilde{\omega}_m$ pour appliquer le théorème 2.4 ; on procède en deux sous-étapes :
   a) on modifie $\tilde{\varphi}_m$ en $\hat{\varphi}_m$ tel que $\hat{\omega}_m := \omega_0 + dd^c\hat{\varphi}_m$ soit positive, de métrique $\hat{g}_m$, et vérifie $(\hat{\omega}_m)^2 = \omega_0^2$ à l'infini ; le prix à payer pour ce faire est une perte sur la finesse des asymptotiques, puisque $\hat{\omega}_m - \omega_m \in C^{2,\alpha}_{\delta} \cap C^{1,\alpha}_{1+\delta} \cap C^{0,\alpha}_{2+\delta}$, avec $\alpha, \delta > 0$ quelconques tels que $\alpha + \delta < 1$.
   b) on met $\hat{\omega}_m$, *qui est Ricci-plate au voisinage de l'infini* (car $\hat{\omega}_m$ et $\omega_0$ y ont même forme volume, et $\omega_0$ est Ricci-plate), en *jauge de Bianchi* par rapport à $h_m$. La jauge, et l'annulation du tenseur de Ricci, nous permettent alors de considérer un difféomorphisme $\Psi$ de $X$ asymptote à l'identité tel que $\Psi^*\hat{g}_m - h_m$ ait la régularité voulue.
3. on peut alors appliquer le théorème 2.3 à $\hat{\omega}_m$ pour la corriger en une métrique $I_1$-kählérienne Ricci-plate $g_m$, et plus précisément de même forme volume que $g_0$. On vérifie alors qu'en posant $J^1_m = I_1$ et $J^m_j$ telle que $g_m(J^m_j\cdot, \cdot) = g_0(I_j\cdot, \cdot)$, $j = 2, 3$, on obtient la structure hyperkählérienne voulue.

Le cas général est plus délicat ; en effet, on n'a plus la coïncidence entre $I$ et $I_1$ comme ci-dessus. On peut toutefois inclure les termes d'erreur dans une progression similaire, au prix d'un calcul explicite de ces termes d'erreur – ce qui nécessite une compréhension fine de la construction des instantons ALE de Kronheimer, et utilise la *théorie des déformations des métriques de Kähler-Einstein*, *cf.* [Bes, ch. 12] –, et éventuellement d'une rotation préalable sur les structures complexes. $\square$

## 3.2 Démonstration du théorème 2.4

On utilise une *méthode de continuité*, classique pour les équations de Monge-Ampère depuis la résolution par S. T. Yau du problème analogue à (2) sur les variétés kählériennes compactes et en toute dimension [Yau]. Cette méthode consiste à résoudre de proche en proche, pour $t \in [0, 1]$, l'équation

$$(*_t) \qquad \big(\omega_Y + dd^c\varphi_t\big)^2 = e^{tf}\omega_Y^2$$

avec $\varphi_t$ vérifiant les mêmes conditions asymptotiques que la fonction $\varphi$ de l'énoncé.

Plus formellement, si $A$ est l'ensemble des $t$ tels que l'équation $(*_t)$ admette une solution, on veut démontrer que $A$ est ouvert et fermé, ce qui permettra de conclure, car alors $A = [0, 1]$, puisque $0 \in A \neq \varnothing$ de manière évidente. Examinons les arguments successivement :

– *l'argument d'ouverture* est relativement simple : il consiste à remarquer que la linéarisation de l'équation de paramètre $t$ est de la forme $\Delta_t\psi = u$, où $\Delta_t$

est le laplacien scalaire associé à $\omega + dd^c\varphi_t$, puis à inverser ce laplacien, ce qui est fait dans [BM] ;
- *l'argument de compacité* est plus technique, et repose sur des *estimations* a priori *des* $\varphi_t$ ; c'est déjà ainsi que Yau procède, ainsi que Joyce, qui résout le problème en géométrie ALE [Joy]. L'estimation cruciale est l'estimée $C^0$ des solutions, qui utilise un jeu d'intégrations par parties avec l'équation $(*_t)$, ainsi qu'une injection de Sobolev *ad hoc*, qui s'énonce : $\int_Y |u|^4\rho^{-1}\,\mathrm{vol}^{g_Y} \leq C\big(|du|^2\,\mathrm{vol}^{g_Y}\big)^2$. $\square$

# Références


[A1] H. Auvray, *From ALF to ALE gravitational instantons. I*, arXiv :1210.1654 [math.DG], preprint 2012.

[A2] ———, *From ALF to ALE gravitational instantons. II*, http://www.mpim-bonn.mpg.de/preblob/5456, preprint 2013.

[Bes] A.L. Besse, *Einstein manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], 10. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[BM] O. Biquard, V. Minerbe, *A Kummer construction for gravitational instantons*, to appear in Comm. Math. Phys.

[CH] S. Cherkis, N. Hitchin, *Gravitational instantons of type $D_k$*, Comm. Math. Phys. 260 (2005), no. 2, 299-317.

[CK] S. Cherkis, A. Kapustin, *Singular monopoles and gravitational instantons of type $D_k$*, Comm. Math. Phys. 203 (1999), 713-728.

[GH] G.W. Gibbons, S.W. Hawking, *Gravitational multi-instantons*, Phys. Lett. B78, 430-432 (1976).

[Haw] S.W. Hawking, *Gravitational instantons*, Phys. Lett. A 60 (1977), no. 2, 81-83.

[Hei] H. J. Hein, *On gravitational instantons*, Thèse de doctorat, Princeton University. 2010.

[Joy] D. Joyce, *Compact Manifolds with Special Holonomy*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 2000.

[Kro1] P.B. Kronheimer, *The construction of ALE spaces as hyper-Kähler quotients*, J. Differential Geom. 29 (1989), no. 3, 665-683

[Kro2] ———, *A Torelli-type theorem for gravitational instantons*, J. Differential Geom. 29 (1989), no. 3, 685-697.

[LeB] C. LeBrun, *Complete Ricci-flat Kähler metrics on $\mathbb{C}^n$ need not be flat*, Proc. Symp. Pure Math. 52.2 (1991) 297-304.

[Min1] V. Minerbe, *Sur l'effondrement à l'infini des variétés asymptotiquement plates*, Thèse de doctorat, http://www.math.jussieu.fr/~minerbe/theseminerbe.pdf.

[Min2] ———, *Rigidity for Multi-Taub-NUT metrics*, J. Reine Angew. Math. 656 (2011), 47-58.

[Yau] Yau, S.T. : *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation*, $I^*$, Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978) 339-441.

CMLA, École Normale Supérieure de Cachan
61 Avenue du Président Wilson, 94230 Cachan
hugues.auvray@ens-cachan.fr