LM 201 - TD 9

3 novembre 2011

Les exercices sont ceux de la feuille n°4, sauf mention contraire.

Exercice 7 (DM). On procède par l'absurde. Soit α une racine (réelle ou complexe) au moins double de P_n, de sorte que $P_n(\alpha) = P_n'(\alpha) = 0$. Or $P_n - P_n' = \frac{X^n}{n!}$, d'où : $\frac{\alpha^n}{n!} = 0$, ce qui si $n \geq 1$, donne $\alpha = 0$, ce qui est contradictoire avec $P_n(0) = 1$, et si $n = 0$, est impossible.

On a donc prouvé que P_n n'admet pas de racine double.

Exercice 12 (DM). Le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ nous dit que F_1 s'écrit :

$$F_1 = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2},$$

avec a, b et $c \in \mathbb{R}$.

On trouve $a = 1$ en évaluant XF_1 en 0, et $c = 1$ en estimant $(X-1)^2F_1$ en 1. Pour b, on peut calculer $F_1(2)$, qui vaut $\frac{1}{2}$ d'un côté, et $\frac{a}{2} + b + c = b + \frac{3}{2}$ de l'autre, d'où : $b = -1$. En conclusion : $F_1 = \frac{1}{X} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}$.

Pour F_2, on commence par mettre son dénominateur sous forme de produits de facteurs irréductibles. On a $X^5 + 2X^3 + X = X(X^4 + 2X^2 + 1) = X(X^2+1)^2$, et X^2+1 est bien irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ nous dit à présent que F_2 s'écrit :

$$F_2 = \frac{a}{X} + \frac{bX+c}{X^2+1} + \frac{dX+e}{(X^2+1)^2},$$

avec a, b, c, d et $e \in \mathbb{R}$.

Comme F_2 est impair ($F_2(-X) = -F_2(X)$), on a immédiatement $c = e = 0$. En évalant XF_2 en 0, on trouve $a = 1$. En évaluant $(X^2+1)^2F_2$ en i (rien ne nous empêche de travailler dans un surcorps de $\mathbb{R}$; il faut juste obtenir des réels à la fin), il vient $di = \frac{1}{i} = -i$, donc $d = -1$. Finalement, on calcule $F_2(1) = \frac{1}{4} = \frac{b}{2} - \frac{1}{4}$, d'où $b = 1$. Ainsi, $F_2 = \frac{1}{X} + \frac{X}{X^2+1} - \frac{X}{(X^2+1)^2}$.

Exercice 1. Puisque l'on a des fonctions de référence (celles qui sont arguments des o) qui ne s'annulent pas au voisinage des points considérés, on utilise la définition de « f négligeable devant g en a » si $\frac{f}{g}$ tend vers 0 en a. On écrit donc : $\frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x\to\infty} 0$, $\frac{x^4}{x^2} = x^2 \xrightarrow{x\to 0} 0$, $\frac{x^n\varepsilon(x)}{x^n} = \varepsilon(x) \xrightarrow{x\to 0} 0$, $\frac{1/x^2}{1/x} = \frac{1}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0$ et $\frac{1/x}{1/x^2} = x \xrightarrow{x\to 0} 0$, ce qui donne respectivement les relations recherchées.

Exercice 3. Je pense qu'il y a une faute dans l'énoncé, et que l'exercice est beaucoup plus intéressant si l'on met comme exposant x à la parenthèse. Cela dit, si l'on met $a^{1/x}$ en facteur, et qu'on le sort de la parenthèse (on aura donc a en facteur de la parenthèse), on se ramène au calcul de la limite (si elle existe) en $+\infty$ de $\left(\frac{1+(b/a)^{1/x}}{2}\right)^x$; il est clair sous cette forme que la parenthèse tend vers 1, et l'on ne peut donc pas conclure pour le moment — penser à $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \xrightarrow{x\to+\infty} e$. On doit donc affiner notre analyse, en ce sens que l'on doit étudier de quelle manière notre parenthèse $\left(\frac{1+(b/a)^{1/x}}{2}\right)$ tend vers 1, c'est-à-dire comment $\left(\frac{b}{a}\right)^{1/x}$ tend vers 1. Et c'est un principe général, lorsque l'on a une fonction de x en exposant, d'utiliser la forme exponentielle, et l'on écrit donc ici $\left(\frac{b}{a}\right)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\log(b/a)\right) = 1 + \frac{1}{x}\log(b/a) + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$. On a donc $\frac{1+(b/a)^{1/x}}{2} = 1 + \frac{1}{2x}\log(b/a) + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$. En mettant cette expression à l'exposant x et en utilisant à nouveau la notation exponentielle, il vient :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+(b/a)^{1/x}}{2}\right)^x &= \exp\left[x\log\left(1+\frac{1}{2x}\log(b/a) + o_{+\infty}\left(\tfrac{1}{x}\right)\right)\right] \\
&= \exp\left[x\left(\frac{1}{2x}\log(b/a) + o_{+\infty}\left(\tfrac{1}{x}\right)\right)\right] \\
&= \exp\left[\frac{1}{2}\log(b/a) + o_{+\infty}(1)\right] = \exp\left[\log\left(\sqrt{b/a}\right) + o_{+\infty}(1)\right] \\
&= \sqrt{\frac{b}{a}}\big(1 + o_{+\infty}(1)\big)
\end{aligned}$$

i.e. $\left(\frac{1+(b/a)^{1/x}}{2}\right)^x$ tend vers $\sqrt{\frac{b}{a}}$ lorsque x tend vers $+\infty$. En remultipliant par le a que l'on avait mis en facteur au début, on obtient que la limite demandée existe et vaut $\sqrt{ab}$, quantité appelée *moyenne géométrique de a et b*.

Exercice 4. Pour tout $x \neq 0$, $\frac{x-1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$, ce qui en valeur absolue est ≤ 2 dès que $|x| \geq 1$.

De même, pour $|x| \geq 2$, $\left|\frac{1}{1-x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2-1} \leq \frac{1}{3}$, pour $|x| \geq 1$, $\left|\frac{x}{x^2}\right| = \frac{1}{|x|} \leq 1$ et $\left|\frac{1/x}{1/x^2}\right| = \frac{1}{|x|} \leq 1$.

Exercice 5. À quelques tournures de phrases près, c'est le même exercice que l'exercice du contrôle de rentrée. Ceci mis à part, on a pour tout $x \neq 0$ que $|f(x)| \leq x^2 \xrightarrow{x\to 0} 0$, ce qui signifie que l'on peut prolonger f en 0 par $f(0) = 0$. Notons encore f la fonction prolongée (soit $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$). On a donc (théorèmes classiques) f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée donnée par $f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout $x \neq 0$. Or des deux termes de cette somme, le premier tend vers 0 avec x (écrire $\left|2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 2|x|$ pour tout $x \neq 0$), et le second n'a pas de limite lorsque x tend vers 0 (utiliser la caratérisation séquentielle de la continuité et la suite $(x_n)_{n\geq 1} := \left(\frac{1}{n\pi}\right)_{n\geq 1}$). On en déduit que f' n'a pas de limite en 0, et qu'elle n'a donc aucune chance d'y être continue (même si $f'(0)$ existe bel et bien, comme on le voit en considérant le taux d'accroissement de f autour de 0). En conclusion, f (qui désigne désormais la fonction prolongée) n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. La fonction f est clairement bornée par $|x^3|$ qui est un $o_0(x^2)$, donc $f(x) = o_0(x^2) = 0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + o_0(x^2)$, ce qui est bien un développement limité à l'ordre 2 en 0.

En outre, f est clairement C^1 sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée $x \mapsto 3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$. En bornant les sinus et cosinus par 1, on voit que f' admet 0 pour limite en 0, et le *théorème de la limite de la dérivée* nous dit que f — la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dès le début, on ne prolonge rien ! — est en réalité dérivable en 0, de dérivée nulle, et qu'elle est finalement C^1 sur la droite réelle toute entière. On aurait aussi pu calculer $f'(0)$ avec le taux d'accroissement de f en 0, et en conclure la continue dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

Et c'est en regardant le taux d'accroissement de f' en 0 que l'on va conclure ; en effet, pour $x \neq 0$, $\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \frac{f'(x)}{x} = 3x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, ce qui n'admet pas de limite lorsque x tend vers 0, à cause du terme $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$, le terme $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ tendant vers 0 avec x par encadrement. Autrement dit, f' n'est pas dérivable en 0, *i.e.* f n'est pas deux fois dérivable en 0.