Département de Mathématiques d'Orsay

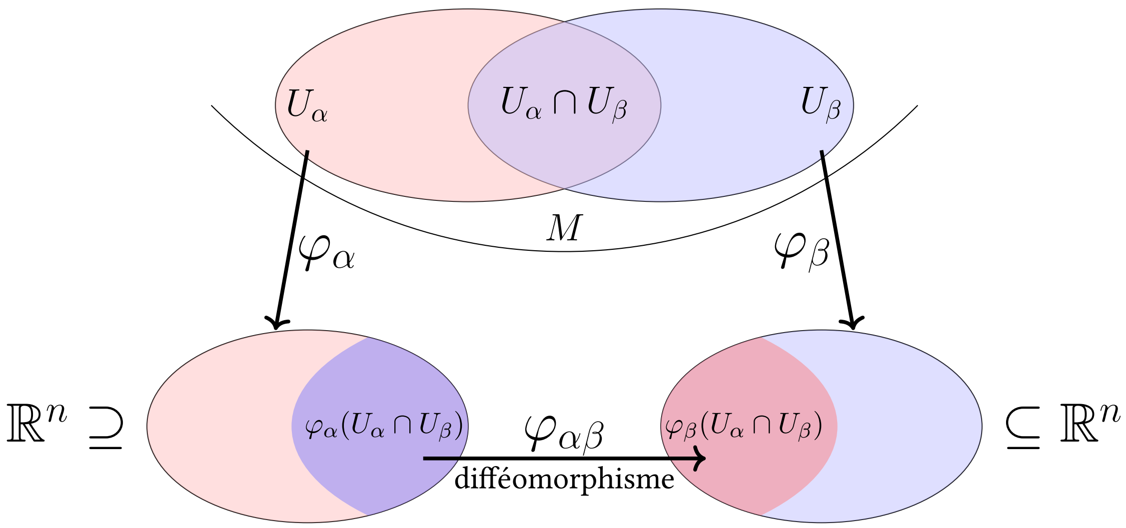
UNIVERSITÉ PARIS SUD — FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

Université Paris 11 - Orsay

Département de Mathématiques d'Orsay

Mémoire du M2 formation à l'enseignement supérieur

LE THÉORÈME DE NEWLANDER - NIRENBERG



Présenté par Achim Napame

Sous la direction de Hugues Auvray

Année 2018 - 2019

Sommaire

1

Géométrie différentielle

Dans ce chapitre, on présente quelques notions de bases sur la géométrie différentielle. On étudiera les notions de fibrés vectoriels, de champs de vecteurs et de dérivations sur les variétés.
Dans la première partie, nous donnerons les définitions de variétés et sous-variété réelle. Dans la deuxième partie, on présentera la notion de fibré vectoriel qui sera utile pour définir l'espace tangent d'une variété. La troisième partie s'articulera autour des notions de champs de vecteurs et dérivations sur une variété. Nous terminerons ce chapitre par démontrer le théorème de Frobenius ; ce théorème sera utile dans la démonstration du théorème 3.17 de Newlander – Nirenberg.

Dans ce chapitre, on note n, m, p trois entiers entiers positifs tel que $n, m > 0$ et k un élément de $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

1.1 Variétés différentielles

On commence cette partie par présenter les théorèmes de formes normales et définir les sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Dans un second temps, nous généraliserons ces notions dans le cadre des variétés.

1.1.1 Immersion et submersion

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Théorème 1.1 (Inversion locale). *On suppose que $n = m$. Si la différentielle $d_{x_0} f$ de f en x_0 est bijective, alors il existe un voisinage U de x_0 et un voisinage V de $f(x_0)$ tel que $f : U \longrightarrow V$ soit un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme.*

Définition 1.2. On dit que f est une *immersion* en x_0 si la différentielle $d_{x_0} f$ est injective. Dans ce cas, on a $n \leq m$.
La fonction f est une *submersion* en x_0 si la différentielle $d_{x_0} f$ est surjective. Dans ce cas, on a $n \geq m$.

Théorème 1.3 (Formes normales). *On suppose ici que $x_0 = 0$.*

1. *Si f est une immersion en x_0, alors il existe un difféomorphisme local $\varphi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tel que $\varphi \circ f(x) = (x, 0)$.*

2. *Si f est une submersion en x_0, alors il existe un difféomorphisme local $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tel que $f \circ \psi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m)$.*

Démonstration. On se ramène au théorème d'inversion locale à travers l'algèbre linéaire. On écrit $f = (f_1, \ldots, f_m)$ où les $f_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions à valeurs réelles. Soit $A = (a_{jl})$ la matrice de $M_{m,n}(\mathbb{R})$ définie par $a_{jl} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_l}(0)$ pour $j \in \{1, \ldots, m\}$ et $l \in \{1, \ldots, n\}$. On a

$$d_0 f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ h & \longmapsto & Ah \end{array}.$$

Premier point. La matrice A est de rang n. Il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$, tel que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $PAX = {}^t(X, 0)$. Soit $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ la fonction définie par $g(x) = Px$; c'est un isomorphisme linéaire. Quitte à utiliser la fonction $g \circ f$, on peut supposer que $d_0 f(h) = (h, 0)$. Soit Ψ l'application définie par

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & (x, y) & \longmapsto & f(x) + (0,\, y) \end{array}.$$

On a $d_0\Psi(x,\, y) = (x,\, y)$. Par le théorème **1.1** d'inversion locale, Ψ est un difféomorphisme local en 0. On pose $\varphi = \Psi^{-1}$. Comme $\Psi(x,\, 0) = f(x)$, nous avons $\varphi \circ f(x) = (x,\, 0)$.

Second point. Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $APX = (x_1, \ldots, x_m)$. Soit $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ la fonction définie par $g(x) = f(Px)$. On a $d_0 g(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m)$. Quitte à utiliser la fonction g, on peut supposer que $d_0 f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m)$. Soit Ψ l'application définie par

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (x,\, y) & \longmapsto & (f(x, y),\, y) \end{array}.$$

Sur un voisinage de 0, Ψ est un difféomorphisme local. On pose $\psi = \Psi^{-1}$, nous avons $[f \circ \psi](x, y) = x$. En effet : si $\Psi(x,\, y) = (X,\, Y)$ où $X = f(x,\, y)$ et $Y = y$, nous avons $[f \circ \psi](X, Y) = [f \circ \psi \circ \Psi](x,\, y) = f(x,\, y) = X$. □

1.1.2 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Théorème 1.4. *On suppose $p \leq n$. Soit M une partie de $\mathbb{R}^n$. Les définitions suivantes sont équivalentes :*

Définition par redressement. *Pour tout $x \in M$, il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage V de $\mathbb{R}^n$ et un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme $\varphi : U \longrightarrow V$ tel que $\varphi(M \cap U) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$. Une telle application φ est appelé carte de M.*

Définition par fonction implicite. *Pour tout $x \in M$, il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$ et une application $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ de classe $\mathscr{C}^k$ qui est une submersion en x, tel que $U \cap M = f^{-1}(0)$.*

Définition 1.5. On dit qu'une partie M de $\mathbb{R}^n$ est une *sous-variété* de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et de classe $\mathscr{C}^k$ si elle vérifie l'une des deux définitions du théorème **1.4**.

Exemple 1.6. Soit $\mathbb{S}_n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ et

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, \ldots, x_{n+1}) & \longmapsto & x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 - 1 \end{array}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{S}_n$, la différentielle $d_x f$ est surjective et $\mathbb{S}_n = f^{-1}(0)$, donc $\mathbb{S}_n$ est une sous variété de $\mathbb{R}^{n+1}$ de dimension n.

1.1.3 Variétés différentielles

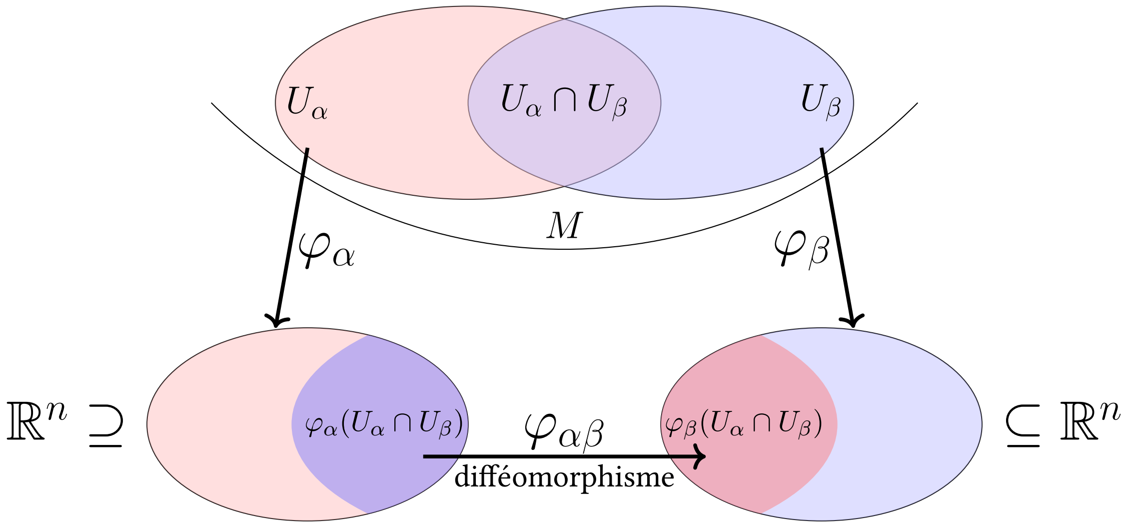
Définition 1.7. Soit M un espace topologique et I un ensemble. Un *atlas de carte* $\mathscr{C}^k$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ sur M est un ensemble $\mathscr{A}$ de couples $(U_\alpha,\, \varphi_\alpha)$ pour $\alpha \in I$ tel que

1. $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ est un recouvrement de M par des ouverts,
2. $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme et pour tout $\alpha,\, \beta \in I$, l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{\alpha\beta} : & \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) & \longrightarrow & \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \\ & x & \longmapsto & \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x) \end{array}$$

   est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme.

Pour $\alpha,\, \beta \in I$, l'application φ_α est appelée une *carte* et l'application $\varphi_{\alpha\beta}$ est appelé *application de transition* ou *changement de carte.*



Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux atlas de cartes de classes $\mathscr{C}^k$. Les atlas $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont *$\mathscr{C}^k$-compatibles* si leur réunion est encore un atlas de classe $\mathscr{C}^k$ ou de manière équivalente, le changement de carte entre une carte de $\mathscr{A}$ et une carte de $\mathscr{B}$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme. Être $\mathscr{C}^k$-compatible est une relation d'équivalence.

Définition 1.8. Une *variété différentielle* de classe $\mathscr{C}^k$ et de dimension n est un espace topologique séparable muni d'un atlas dénombrable de cartes de classe $\mathscr{C}^k$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (ou de manière équivalente d'une classe d'équivalence d'atlas de cartes $\mathscr{C}^k$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$).

Exemple 1.9. Une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ de dimension p ($p \leq n$) est une variété différentielle.

On peut généraliser la notion de sous-variété de $\mathbb{R}^n$ aux variétés abstraites.

Définition 1.10. On suppose $p \leq n$. Soit M une variété de dimension n et $N \subset M$ une partie de M. On dit que N est une *sous-variété* de M de dimension p si l'une des deux définitions équivalentes est vérifiée.

Définition par redressement. Pour tout $x \in N$, il existe $\varphi : U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ une carte de M telle que U contient x et $\varphi(N \cap U) = (\mathbb{R}^p \times \{0\}) \cap V \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$.

Définition par fonction implicite. Pour tout $x \in N$, il existe un ouvert de carte U de M tel que $x \in U$ et une application $f = f_U : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ de classe $\mathscr{C}^k$ qui est une submersion en x vérifiant $U \cap N = f^{-1}(0)$.

Soient M et N deux variétés de classe $\mathscr{C}^k$ et de dimension m et n respectivement. Soit $f : M \longrightarrow N$ une application continue.

Définition 1.11. L'application f est de classe $\mathscr{C}^r$ ($r \leq k$) si pour toute carte $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de M et $\psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de N, l'application f lue dans les cartes (U, φ) et (V, ψ) est de classe $\mathscr{C}^r$, c'est-à-dire : l'application

$$g : \begin{array}{ccc} \varphi(U \cap f^{-1}(V)) & \longrightarrow & \psi(V) \\ x & \longmapsto & (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^r$.

Soit $x \in M$, (U, φ) une carte de M en x et (V, ψ) une carte de N en $f(x)$.
L'application f est une *immersion* en x si l'application f lue dans les cartes (U, φ) et (V, ψ) est une immersion au point $\varphi(x)$. De même, f est une *submersion* en x si l'application f lue dans les cartes (U, φ) et (V, ψ) est une submersion au point $\varphi(x)$.

Comme généralisation du théorème 1.3, on a :

Théorème 1.12. *1. Si f est une immersion en x alors pour toute carte locale φ en x telle que $\varphi(x)=0$, il existe une carte locale ψ en $f(x)$ avec $\psi(f(x))=0$ telle qu'au voisinage de 0 on ait $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(x_1,\ldots,x_m)=(x_1,\ldots,x_m,0,\ldots,0)$.*

2. Si f est une submersion en x alors pour toute carte locale ψ en $f(x)$ telle que $\psi(f(x))=0$, il existe une carte locale φ en x avec $\varphi(x)=0$ telle qu'au voisinage de 0 on ait $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(x_1,\ldots,x_m)=(x_1,\ldots,x_n)$.

1.2 Espaces tangents

Avant de définir l'espace tangent d'une variété, nous commençons par définir l'espace tangent d'une sous-variété réelle. Compte tenue des propriétés de l'espace tangent d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, on veut voir s'il n'existe pas de versions analogues dans le cas d'une variété. Pour cette raison on a besoin de la notion de fibré vectoriel.

1.2.1 Espace tangent d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$

Soit M une sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ de dimension p.

Définition 1.13. Soit $x\in M$. Un vecteur $v\in\mathbb{R}^n$ est tangent à M en x s'il existe une courbe $c:\,]-\varepsilon,\,\varepsilon[\,\longrightarrow M$ de classe $\mathscr{C}^1$ avec $\varepsilon>0$ tel que $c(0)=x$ et $c'(0)=v$.
L'espace des vecteurs tangent de M en x est appelé *espace tangent* de M en x et est noté T_xM

Exemple 1.14. Soit $x_0\in\mathbb{R}^n$ et V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si $M=x_0+V$ alors pour tout $x\in M$, $T_xM=V$.

Proposition 1.15. *Pour tout $x\in M$, T_xM est un espace vectoriel de dimension p.*

Démonstration. Soit $x\in M$, U un voisinage de x et $\varphi:U\longrightarrow V$ comme dans la première définition du théorème 1.4 . Si c est une courbe de M passant par x, alors $\varphi\circ c$ est une courbe de $V\cap(\mathbb{R}^p\times\{0\})$ passant par $\varphi(x)$ et $\dfrac{d}{dt}\left[\varphi(c(t))\right]\Big|_{t=0}=d_x\varphi(c'(0))$. Ainsi, $X\in T_xM$ si et seulement si $d_x\varphi(X)\in T_{\varphi(x)}\varphi(M\cap U)$; donc l'application $d_x\varphi:T_xM\longrightarrow T_{\varphi(x)}\varphi(M\cap U)$ est un isomorphisme et

$$T_xM=(d_x\varphi)^{-1}(\mathbb{R}^p\times\{0\})\ .$$

Ainsi, T_xM est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension p. □

Proposition - définition 1.16. L'ensemble TM de tous les vecteurs tangents de M définie par

$$TM=\{(x,\,X)\in M\times\mathbb{R}^n \text{ tel que } X\in T_xM\}$$

est appelé *espace tangent* de M. L'espace total TM est une sous-variété de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ de dimension $2p$.

Démonstration. Si $\varphi:U\longrightarrow V$ une carte en M, alors l'application

$$\begin{array}{rccc}\Psi: & U\times\mathbb{R}^n & \longrightarrow & V\times\mathbb{R}^n\\ & (x,X) & \longmapsto & (\,\varphi(x),\,d_x\varphi(X)\,)\end{array}$$

est une carte de TM. □

1.2.2 Fibrés vectoriels réels

Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. L'espace tangent TM est localement difféomorphe au produit d'un ouvert de M avec un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si $\pi : TM \longrightarrow M$ est la projection de TM sur M, pour tout $x \in M$, $\pi^{-1}(x)$ est identifié à un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On peut donc voir TM comme une famille d'espaces vectoriels. Cet exemple est un cas particulier de la notion de fibré vectoriel.

Définition 1.17. Soit B une variété de classe $\mathscr{C}^{k+1}$. Un *fibré vectoriel réel* ξ de classe $\mathscr{C}^k$ et de rang p sur B est la donnée d'une famille d'espaces vectoriels réels $(E_x)_{x\in B}$ de dimension p et d'une structure de variété $\mathscr{C}^k$ sur $E = \bigcup\limits_{x\in B} E_x$ telle que les conditions suivantes sont vérifiées :

1. L'application $\pi : E \longrightarrow B$ envoyant E_x sur x est de classe $\mathscr{C}^k$.
2. Pour tout $x \in B$, il existe un voisinage ouvert U de x dans B et un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme $\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^p$ tel que $\mathrm{pr}_1 \circ\varphi = \pi$ et $\mathrm{pr}_2 \circ\varphi_{|E_b} : E_b \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est un isomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire pour tout $b \in U$.

On dit que π est la *projection de* ξ, B la *base*, E l'*espace total*, $E_x = \pi^{-1}(x)$ la *fibre* au dessus de x, U un *ouvert distingué* (ou *de trivialisation*) et φ une *trivialisation locale* de π au dessus de U.

Définition 1.18. Soit ξ et ξ' deux fibrés vectoriels réels de projections $\pi : E \longrightarrow B$ et $\pi' : E' \longrightarrow B'$ respectivement. Un *morphisme* de ξ dans ξ' est un couple d'applications $(f, \overline{f})$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ B \arrow[r, "\overline{f}"] & B' \end{tikzcd} ,$$

et pour tout $b \in B$, $f_{|E_b} : E_b \longrightarrow E'_{\overline{f}(b)}$ est un morphisme d'espaces vectoriels réels c'est-à-dire une application $\mathbb{R}$-linéaire.

Soient ξ, ξ' et ξ'' trois fibrés vectoriels. Soient $(f, \overline{f})$ un morphisme de ξ dans ξ' et $(g, \overline{g})$ un morphisme de ξ' dans ξ'' alors $(g \circ f, \overline{g} \circ \overline{f})$ est un morphisme de ξ dans ξ''.

Définition 1.19. Une *section* de classe $\mathscr{C}^k$ d'un fibré vectoriel $\pi : E \longrightarrow B$ de classe $\mathscr{C}^k$ est une application $s : B \longrightarrow E$ de classe $\mathscr{C}^k$ telle que $\pi \circ s = \mathrm{Id}_B$.

1.2.3 Espace tangent d'une variété

Dans le cas d'une variété abstraite, on peut construire l'espace géométrique de tous les vecteurs tangents. Cette construction est semblable à celle faite pour les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.20. Soit M une variété, $x \in M$ et $\varepsilon > 0$ un réel. Soit $c_1,\ c_2 :]-\varepsilon;\ \varepsilon[\longrightarrow M$ deux chemins tel que $c_1(0) = c_2(0) = x$. Les chemins c_1 et c_2 sont *équivalents* si pour toute carte locale φ en x,

$$(\varphi \circ c_1)'(0) = (\varphi \circ c_2)'(0) \ \ .$$

Dans cette définition, on aurait pu demander l'égalité uniquement pour une carte. En effet si φ_α est une carte locale en x telle que $(\varphi_\alpha \circ c_1)'(0) = (\varphi_\alpha \circ c_2)'(0)$ et φ_β une autre carte locale en x, nous avons :

$$(\varphi_\beta \circ c_1)'(0) = d_{\varphi_\alpha\circ c_1(0)}[\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}](\,(\varphi_\alpha \circ c_1)'(0)\,) = (\varphi_\beta \circ c_2)'(0) \ \ .$$

Notation. Si $c :] - \varepsilon;\ \varepsilon[\longrightarrow M$ est un chemin tel que $c(0) = x$, on note $[c,\ x]$ la classe d'équivalence de chemins équivalents à c pour la relation ci-dessus. L'élément $[c,\ x]$ est un vecteur tangent à M en x. L'ensemble de tous les vecteurs tangent à M en x est appelé *espace tangent* de M en x et est noté T_xM.

Soit M et N deux variétés de classe $\mathscr{C}^k$. Soit $f : M \longrightarrow N$ une application de classe $\mathscr{C}^k$. Si c est un chemin dans M passant par $x \in M$, alors $f \circ c$ est un chemin dans N passant par $f(x)$.

Lemme 1.21. *Si c_1 et c_2 sont deux chemins équivalents alors $f \circ c_1$ et $f \circ c_2$ le sont aussi.*

Démonstration. Soit φ une carte locale de M en x et ψ une carte locale de N en $f(x)$.
Comme $(\varphi \circ c_1)'(0) = (\varphi \circ c_2)'(0)$, nous avons :

$$\begin{aligned}(\psi \circ f \circ c_1)'(0) &= (\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ c_1)'(0) \\ &= d_{\varphi \circ c_1(0)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})((\varphi \circ c_1)'(0)) \\ &= d_{\varphi \circ c_2(0)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})((\varphi \circ c_2)'(0)) \\ &= (\psi \circ f \circ c_2)'(0) \ ,\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Ainsi l'application $\begin{array}{rccc} T_x f : & T_x M & \longrightarrow & T_{f(x)} N \\ & [c,\, x] & \longmapsto & [f \circ c,\, f(x)] \end{array}$ est bien définie. Si f est un difféomorphisme, nous avons $(T_x f\,)^{-1} = T_{f(x)}(f^{-1})$.

Soit M une variété de dimension n et $x \in M$. Si φ est une carte locale en x alors l'application

$$\begin{array}{rccc} T_x \varphi : & T_x M & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & [c,\, x] & \longmapsto & (\varphi \circ c)'(0) \end{array}$$

est un isomorphisme. Si $\varphi(x) = 0$ et ψ une autre carte locale de M en x, le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} & T_x M \arrow[dl, "T_x\varphi"'] \arrow[dr, "T_x\psi"] & \\ \mathbb{R}^n \arrow[rr, "d_0(\psi \circ \varphi^{-1})"] & & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Comme $d_0(\psi \circ \varphi^{-1})$ préserve la structure d'espace vectoriel, les structures d'espace vectoriel sur $T_x M$ issues de $T_x \varphi$ et $T_x \psi$ sont les mêmes. Donc $T_x M$ est bien un espace vectoriel réel de dimension n.

On définit l'*espace tangent* d'une variété M par

$$TM = \coprod_{x \in M} T_x M = \{(x,\, X) \text{ tel que } x \in M \text{ et } X \in T_x M\} \ .$$

L'espace TM est muni d'une projection $\pi : TM \longrightarrow M$ définie par $\pi(x,\, X) = x$.

Proposition 1.22. *On suppose $k \geq 2$. Si M est une variété de dimension n et de classe $\mathscr{C}^k$, alors TM hérite canoniquement d'une structure de variété de dimension $2n$ et de classe $\mathscr{C}^{k-1}$.*

Démonstration. Soit $(U_\alpha,\, \varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ un atlas de cartes pour la variété M. Pour tout α, on pose

$$\begin{array}{rccc} d\varphi_\alpha : & \pi^{-1}(U_\alpha) & \longrightarrow & \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \\ & (x,\, X) & \longmapsto & (\varphi_\alpha(x),\, d_x\varphi_\alpha(X)\,) \end{array} .$$

L'application $d\varphi_\alpha$ est une carte pour la variété TM. Pour $\alpha,\, \beta \in I$, l'application de changement de carte est définie par

$$\begin{array}{rccc} d\varphi_{\alpha\beta} : & \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n \\ & (x,\, X) & \longmapsto & (\,\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x)\,,\, d_x(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(X)\,) \end{array} .$$

Comme $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^k$ et $d_x(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})$ est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^{k-1}$, on conclut que $d\varphi_{\alpha\beta}$ est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^{k-1}$.
Ainsi $(\varphi_\alpha(U_\alpha)\,,\, d\varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ est un atlas de cartes de TM à valeurs dans $\mathbb{R}^{2n}$ de classe $\mathscr{C}^{k-1}$. Donc TM est une variété de dimension $2n$ et de classe $\mathscr{C}^{k-1}$. □

Remarque 1.23. L'application $\pi : TM \longrightarrow M$ est la projection d'un fibré vectoriel réel ; ce fibré vectoriel est appelé *fibré tangent* de M.

Soit M et N deux variétés de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ et $f : M \longrightarrow N$ une application de classe $\mathscr{C}^{k+1}$. Alors l'application Tf définie par

$$\begin{array}{rccc} Tf: & TM & \longrightarrow & TN \\ & (x, [c, x]) & \longmapsto & (f(x), [f \circ c, f(x)]) \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^k$. Le couple (Tf, f) est une morphisme de fibrés vectoriels de $TM \longrightarrow M$ sur $TN \longrightarrow N$; en particulier le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "Tf"] \arrow[d] & TN \arrow[d] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

Remarque 1.24. Si M est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et N un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on définit l'application Tf par :

$$\begin{array}{rccc} Tf: & TM & \longrightarrow & TN \\ & (x, v) & \longmapsto & (f(x), d_x f(v)) \end{array} .$$

1.3 Champs de vecteurs

Dans cette partie, M désigne une variété $\mathscr{C}^\infty$ de dimension n. Cette partie a pour but de présenter les différentes propriétés des champs de vecteurs. On commence par le définir, puis on présente l'écriture d'un champ de vecteurs dans une carte locale. Dans un deuxième temps, dans le cadre des variétés de classe $\mathscr{C}^\infty$, on montre qu'il existe une correspondance entre champs de vecteurs et dérivations. Grâce à cette correspondance, on définit le crochet de Lie de deux champs de vecteurs. On termine cette partie en donnant quelques propriétés sur les flots de champs de vecteurs.

Définition 1.25. Un *champ de vecteurs de classe* $\mathscr{C}^k$ est une section $\mathscr{C}^k$ du fibré tangent de M.

Notation. On note $\Gamma_k(TM)$ l'ensemble des champs de vecteurs de classe $\mathscr{C}^k$ et $\Gamma(TM)$ l'ensemble des champs de vecteurs de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Comme pour tout $x \in M, T_xM$ est un espace vectoriel, on peut munir $\Gamma_k(TM)$ d'une structure d'espace vectoriel pour l'addition point par point et de la multiplication externe point par point. Si $X, Y \in \Gamma_k(TM)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons $(X+Y) : x \in M \longmapsto X(x) + Y(x)$ et $(\lambda X) : x \in M \longmapsto \lambda X(x)$.

Si $f \in \mathscr{C}^k(M, \mathbb{R})$ et $X \in \Gamma_k(TM)$, alors (fX) est un élément de $\Gamma_k(TM)$ définie par $(fX)(x) = f(x)X(x)$. On dit que $\Gamma_k(TM)$ est un $\mathscr{C}^k(M, \mathbb{R})$-module.

Soit N une variété de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ et $f : M \longrightarrow N$ un $\mathscr{C}^{k+1}$-difféomorphisme.

Définition 1.26 (Image réciproque). Soit $Y \in \Gamma_k(TN)$. On définit un champ de vecteurs f^*Y sur M de classe $\mathscr{C}^k$ appelé *image réciproque* de Y par f, par

$$f^*Y : x \longmapsto (T_xf)^{-1}(Y(f(x))) .$$

Propriété 1.27.

1. L'application de $\Gamma_k(TN)$ dans $\Gamma_k(TM)$ définie par $Y \longmapsto f^*Y$ est $\mathbb{R}$-linéaire et pour tout $g \in \mathscr{C}^k(N, \mathbb{R})$ on a $f^*(gY) = (g \circ f)f^*Y$.
2. Soient P une variété $\mathscr{C}^{k+1}$, $g : N \longrightarrow P$ un $\mathscr{C}^{k+1}$-difféomorphisme et Z un champ de vecteur $\mathscr{C}^k$ sur P. Alors $(g \circ f)^*Z = f^*(g^*Z)$.

On peut pousser en avant les champs de vecteurs. Si $X \in \Gamma_k(TM)$, on note f_*X le champ de vecteurs de classe $\mathscr{C}^k$ sur N défini par $(f^{-1})^*X$, c'est-à-dire

$$f_*X : y \longmapsto T_{f^{-1}(y)}f(\,X(\,f^{-1}(y)\,)\,)\ .$$

Pour tout $X \in \Gamma_k(TM)$ et $Y \in \Gamma_k(TN)$, on a $f^*(f_*X) = X$ et $f_*(f^*Y) = Y$; donc

$$f^* : \Gamma_k(TN) \longrightarrow \Gamma_k(TM)$$

est un *isomorphisme* d'espace vectoriel d'inverse f_* .

1.3.1 Champ de vecteurs dans une carte

Soit $X \in \Gamma_k(TM)$. La restriction de X à U est un champ de vecteurs sur U noté $X_{|U}$.

Soit U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On a $TU = U \times \mathbb{R}^n$ et un champ de vecteurs sur U est une application $x \longmapsto (x,\, X(x))$ qui s'identifie à $X \in \mathscr{C}^k(U,\, \mathbb{R}^n)$.
Si $(e_1,\, \ldots,\, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors les champs de vecteurs $E_j : x \longmapsto e_j$ forment une base de $\Gamma_k(TU)$. Donc tout champ de vecteurs X sur U s'écrit de façon unique sous la forme

$$X = \sum_{j=1}^{n} f_j\, E_j$$

où $f_i \in \mathscr{C}^k(U,\, \mathbb{R})$.

Soit $(U,\, \varphi)$ une carte locale de M et $X \in \Gamma_k(TU)$. Le champ de vecteurs $\varphi_*(X_{|U})$ est un champ de vecteurs sur $\varphi(U)$. Dans la base des champs de vecteurs E_j, nous avons $\varphi_*(X_{|U}) = \sum_{j=1}^{n} f_j\, E_j$ où $f_j \in \mathscr{C}^k(\varphi(U),\, \mathbb{R})$. Si $X_j = f_j \circ \varphi$, alors $X_{|U} = \sum_{j=1}^{n} X_j\, \varphi^* E_j$.
Les $X_j \in \mathscr{C}^k(U,\, \mathbb{R})$ sont les coordonnées locale de X dans la carte $(U,\, \varphi)$.

Proposition 1.28. *Soit $(V,\, \psi)$ une autre carte locale et $\varphi \circ \psi^{-1}$ l'application de changement de carte définie par $\varphi \circ \psi^{-1} : y = (y_1, \ldots,\, y_n) \longmapsto (x_1(y_1, \ldots,, y_n), \ldots,\, x_n(y_1, \ldots,, y_n))$. Si $X_{|V} = \sum_{j=1}^{n} Y_j\, \psi^* E_j$ alors $X_l = \sum_{j=1}^{n} Y_j \dfrac{\partial x_l}{\partial y_j} \circ \psi$.*

Démonstration. Pour $a \in U \cap V$, on a

$$\begin{aligned}
\psi^* E_j(a) &= (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi)^* E_j(a) = (T_a\varphi)^{-1} \left[(\psi \circ \varphi^{-1})^* E_j(\,\varphi(a)\,)\right] \\
&= (T_a\varphi)^{-1} \left[(\varphi \circ \psi^{-1})_* E_j(\,\varphi(a)\,)\right] = (T_a\varphi)^{-1} \left(T_{\psi(a)}(\varphi \circ \psi^{-1})[\,E_j(\psi(a))\,]\right) \\
&= (T_a\varphi)^{-1} \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x_l}{\partial y_j}(\psi(a))\, e_l\right) = (T_a\varphi)^{-1} \left(\sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial x_l}{\partial y_j} \circ \psi \circ \varphi^{-1}\right) \cdot E_l\right)(\,\varphi(a)\,)\ ,
\end{aligned}$$

donc

$$\psi^* E_j = \varphi^* \left(\sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial x_l}{\partial y_j} \circ \psi \circ \varphi^{-1}\right) \cdot E_l\right) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x_l}{\partial y_j} \circ \psi \cdot \varphi^* E_l\ .$$

Ainsi,

$$X = \sum_{j=1}^{n} Y_j \psi^* E_j = \sum_{j=1}^{n} Y_j \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x_l}{\partial y_j} \circ \psi \cdot \varphi^* E_l = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} Y_j \frac{\partial x_l}{\partial y_j} \circ \psi\right) \varphi^* E_l\ ,$$

d'où la proposition. □

1.3.2 Dérivations

Définition 1.29. Une *k-dérivation* (ou *dérivation*) de M sur les fonctions à valeurs réelles est une application linéaire $\delta : \mathscr{C}^{k+1}(M,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{C}^k(M,\mathbb{R})$ qui vérifie la règle de Leibniz, c'est à dire : pour tout $f,\, g \in \mathscr{C}^{k+1}(M,\mathbb{R})$,

$$\delta(fg) = f\delta(g) + g\delta(f) \ .$$

Soit f une fonction appartenant à $\mathscr{C}^k(M,\mathbb{R})$ et δ une dérivation. pour tout $g \in \mathscr{C}^{k+1}(M,\mathbb{R})$ et $x \in M$, on définit la dérivation $f\delta$ par

$$(f\delta)(g)(x) = f(x)\,\delta(g)(x) \ .$$

On note $\mathscr{D}_k(M)$ l'ensemble des k-dérivation. Si $k=\infty$, on notera l'ensemble $\mathscr{D}_k(M)$ par $\mathscr{D}(M)$. L'ensemble $\mathscr{D}_k(M)$ est un $\mathscr{C}^k(M,\mathbb{R})$-module.

Remarque 1.30. Les dérivations sont nulles sur les constantes.

Proposition 1.31. *Soit δ une dérivation. Si les fonctions f et g appartenant à $\mathscr{C}^{k+1}(M,\mathbb{R})$ coïncident sur un ouvert U de M, alors les fonctions δf et δg coïncident sur U.*

Définition 1.32. Soient N une variété de classe $\mathscr{C}^{k+1}$, δ une dérivation sur N et $\varphi : M \longrightarrow N$ un $\mathscr{C}^{k+1}$-difféomorphisme local. Pour tout x dans M, il existe U_x et V_x des voisinages ouverts de x et $\varphi(x)$ respectivement tels que $\varphi : U_x \longrightarrow V_x$ est un $\mathscr{C}^{k+1}$-difféomorphisme. Pour $x \in M$, on note $\chi_x \in \mathscr{C}^{k+1}(V_x,\mathbb{R})$ une fonction à support dans V_x tel que $\chi_x = 1$ près de $\varphi(x)$. On définit la dérivation $\varphi^*\delta$ de M par :

$$\begin{array}{rccl} \varphi^*\delta : & \mathscr{C}^{k+1}(M,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^k(M,\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & (\varphi^*\delta)(f) : x \longmapsto \delta[\chi_x\, f\circ\varphi^{-1}](\varphi(x)) \end{array} .$$

Remarque 1.33. La formule définissant $\varphi^*\delta$ ne dépend pas du choix de χ_x.

Exemples 1.34. 1. Si (U,φ) est une carte locale de M à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ de coordonnées canoniques $(x_1,\ldots,x_n)$, alors les

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial}{\partial x_j} : & \mathscr{C}^{k+1}(U,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^k(U,\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & \dfrac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_j}\circ\varphi \end{array}$$

sont des dérivations sur U.

2. Soit $X \in \Gamma(TM)$ un champ de vecteurs. L'application

$$\begin{array}{rccl} \mathscr{L}_X : & \mathscr{C}^{k+1}(M,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^k(M,\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & \mathscr{L}_X f : x \longmapsto (T_x f)(\,X(x)\,) \end{array}$$

est une dérivation. Cette application est l'action de la *dérivée de Lie* $\mathscr{L}_X$ sur les fonctions.

Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de base canonique $(e_1,\ldots,e_n)$ et de coordonnées canoniques $(x_1,\ldots,x_n)$, nous avons $\mathscr{L}_{E_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$. Plus généralement, si (U,φ) est une carte locale de M à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, nous avons $\mathscr{L}_{\varphi^* E_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

Théorème 1.35.

L'application $\begin{array}{rcl} \Gamma(TM) & \longrightarrow & \mathscr{D}(M) \\ X & \longmapsto & \mathscr{L}_X \end{array}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Démonstration. Cette application est bien linéaire. Montrons l'injectivité. On suppose que $\mathscr{L}_X = 0$ pour un certain X. Soit (U, φ) une carte locale de M de coordonnées canoniques $(x_1, \dots, x_n)$. On note $\chi_j : (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_j$ l'application j-ème coordonnée. Pour tout $x \in U$, on a

$$0 = (\mathscr{L}_X)\chi_j(x) = (T_x\chi_j)(X(x)) = \chi_j(X(x)) \ ,$$

donc X est le champ de vecteurs nulle sur U.

Montrons que l'application est surjective lorsque M est la boule unité ouverte B de $\mathbb{R}^n$.

Lemme 1.36. *Soit $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^\infty$. Pour tout $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans B, il existe des applications $h_{1,y}, \dots, h_{n,y} : B \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$ dans B,*

$$f(x) - f(y) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)h_{j,y}(x) \ .$$

En effet : $f(x) - f(y) = \displaystyle\int_0^1 \frac{d}{dt} f(t(x-y)+y)\,dt = \sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(t(x-y)+y)\,dt$.

Soit δ une dérivation sur B. Par le lemme **1.36**, pour tout $f \in \mathscr{C}^\infty(B, \mathbb{R})$ et tout $y \in B$, nous avons :

$$\begin{aligned} \delta f(y) = \delta(f - f(y))(y) &= \sum_{j=1}^{n} [\, h_{j,y}(y)\delta(\chi_j - y_j)(y) + (y_j - y_j)\delta(h_{j,y})(y) \,] \\ &= \sum_{j=0}^{n} \delta(\chi_j)(y) \frac{\partial f}{\partial x_j}(y) \ . \end{aligned}$$

On pose $g_j = \delta(\chi_j)$, nous avons $\delta = \mathscr{L}_Y$ où $Y = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} g_j E_j$. Donc l'application est bien surjective.

On suppose maintenant que M est une variété abstraite. Soit $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ un atlas de carte de M tel que $\varphi_\alpha(U_\alpha) = B$. Soit δ une dérivation sur M.
On a $(\varphi_\alpha)_*(\delta_{|U_\alpha}) = \mathscr{L}_{Y_\alpha}$ où Y_α est un champ de vecteurs sur B. Donc $\delta_{|U_\alpha} = (\varphi_\alpha)^*(\mathscr{L}_{Y_\alpha}) = \mathscr{L}_{(\varphi_\alpha)^* Y_\alpha}$.
On note X_α le champ de vecteurs $(\varphi_\alpha)^* Y_\alpha$; X_α est un champ de vecteurs sur U_α. Sur $U_\alpha \cap U_\beta$, les champs de vecteurs X_α et X_β coïncident ; donc les X_α se recollent en un champ de vecteurs X sur M.
Comme pour tout α nous avons $\delta_{|U_\alpha} = \mathscr{L}_{X_\alpha} = (\mathscr{L}_X)_{|U_\alpha}$, on conclut que $\delta = \mathscr{L}_X$. □

Remarque 1.37. Si $X \in \Gamma(TM)$, alors on identifie le champ de vecteurs X avec la dérivée de Lie $\mathscr{L}_X$. Si $f \in \mathscr{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, on notera $X(f)$ l'élément $\mathscr{L}_X(f)$.

1.3.3 Crochets de champs de vecteurs

Soit $\delta, \delta' \in \mathscr{D}(M)$. L'élément $[\delta, \delta'] = \delta \circ \delta' - \delta' \circ \delta$ est une dérivation sur M. En effet :

$$\begin{aligned} \delta \circ \delta'(fg) &= f\,(\delta \circ \delta')g + (\delta f)(\delta' g) + (\delta g)(\delta' f) + g(\delta \circ \delta' f) \ \text{ et} \\ \delta' \circ \delta(fg) &= f\,(\delta' \circ \delta)g + (\delta' f)(\delta g) + (\delta' g)(\delta f) + g(\delta' \circ \delta f) \ , \end{aligned}$$

donc $[\delta, \delta'](fg) = f[\delta, \delta']g + g[\delta, \delta']f$.

Définition 1.38. Soit $X, Y \in \Gamma(TM)$. On note $[X, Y]$ le champ de vecteurs tel que

$$\mathscr{L}_{[X,Y]} = [\mathscr{L}_X, \mathscr{L}_Y] \ .$$

On appelle $[X, Y]$ est le *crochet de Lie* de X et Y. Pour tout $f \in \mathscr{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, $[X, Y](f) = X(\,Y(f)\,) - Y(\,X(f)\,)$.

Lemme 1.39. *Soient M et N deux variétés de classe $\mathscr{C}^\infty$ et $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. On a :*

1. $[X,\, Y] + [Y,\, X] = 0$ *: anti-commutativité ;*
2. $[X,\, [Y,\, Z]] + [Y,\, [Z,\, X]] + [Z,\, [X,\, Y]] = 0$ *: identité de Jacobi ;*
3. *pour tout* $f : N \longrightarrow M$ *un* $\mathscr{C}^\infty$*-difféomorphisme,* $f^*[X,\, Y] = [f^*X,\, f^*Y]$ *: fonctorialité de* $[\cdot\,,\,\cdot]$.
4. *Soit* $(U,\, \varphi)$ *une carte locale de* M*. Si sur* U*,* $X = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} f_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ *et* $Y = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} g_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ *alors sur* U*,*
$$[X,\, Y] = \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(f_j \frac{\partial g_l}{\partial x_j} - g_j \frac{\partial f_l}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_l} \quad . \tag{1.1}$$
5. *Pour* $f \in \mathscr{C}^\infty(M,\, \mathbb{R})$*, on a* $[X,\, fY] = f\,[X,\, Y] + (\mathscr{L}_X f)Y$.

Proposition 1.40. *Soit* N *une sous-variété de* M *et* X*,* Y *des champs de vecteurs sur* M*. Si les restrictions de* X *et* Y *à* N *restent dans* $TN \subset TM_{|N}$*, alors* $[X,\, Y]_{|N}$ *est tangent à* N *et est égal* $[X_{|N},\, Y_{|N}]$.

1.3.4 Flot d'un champ de vecteurs

Soit $X \in \Gamma(TM)$ un champ de vecteurs. On cherche les solutions $c : I \longrightarrow M$ définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant 0 de l'équation
$$c'(t) = X(c(t)) \quad . \tag{1.2}$$

Exemple 1.41. Si $M = \mathbb{R}^2$ alors X est de la forme $X = f(x,\, y)\dfrac{\partial}{\partial x} + g(x,\, y)\dfrac{\partial}{\partial y}$ et la courbe $c(t) = (x(t),\, y(t))$ vérifie l'équation
$$\begin{cases} x' = f(x,\, y) \\ y' = g(x,\, y) \end{cases} \quad .$$

Plus généralement si $(x_1, \ldots,\, x_n)$ sont les coordonnées locales de $x \in M$ et $(X_j)_{1\le j\le n}$ les coordonnées locales de X vu à travers un carte, en notant $c(t) = (x_1(t), \ldots,\, x_n(t))$, l'équation **(1.2)** devient
$$x_j' = X_j(x_1, \ldots,\, x_n) \ \text{ pour tout } j \in \{1, \ldots,\, n\} \quad .$$
Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout $x \in M$, il existe une unique courbe intégrale $c : I \longrightarrow M$ de X définie localement tel que $c(0) = x$ et $c'(t) = X(c(t))$. Ainsi, pour $x \in M$ fixé, on note c_x la solution maximale de l'équation $c'(t) = X(c(t))$ de condition initiale $c(0) = x$.

Définition 1.42. Le champ de vecteur X est *complet* si pour tout $x \in M$, la solution c_x est définie sur $\mathbb{R}$.

Lemme 1.43. *Si* $c : I \longrightarrow M$ *est une solution de l'équation* **(1.2)***, alors pour toute carte* $(U_\alpha,\, \varphi_\alpha)$ *de* M *tel que* $I_\alpha = I \cap c^{-1}(U_\alpha) \neq \varnothing$ *on a : pour tout* $t \in I_\alpha$ *,*
$$(\varphi_\alpha \circ c)'(t) = [\,(\varphi_\alpha)_* X\,](\varphi_\alpha \circ c(t)) \quad . \tag{1.3}$$

Démonstration. Pour tout $t \in I_\alpha$, il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\varphi_\alpha^{-1}(y) = c(t)$. Si $t \in I_\alpha$, on a :
$$(\varphi_\alpha \circ c)'(t) = T_{c(t)}\varphi_\alpha(\,c'(t)\,) = T_{\varphi_\alpha^{-1}(y)}\varphi_\alpha(\,X(\varphi_\alpha^{-1}(y))\,) = [(\varphi_\alpha)_* X](y) = [\,(\varphi_\alpha)_* X\,](\varphi_\alpha \circ c(t)) \quad .$$
□

Lemme 1.44. *Si* X *est à support compact, alors* X *est complet.*

Démonstration. Soit $(U_\alpha,\, \varphi_\alpha)$ une carte de M et $Y_\alpha = (\varphi_\alpha)_* X_{|U_\alpha}$ un champ de vecteur sur $\mathbb{R}^n$. Le champ de vecteurs Y_α est à support compact.
Par le lemme des bouts, si c_1 est une solution de $a'(t) = Y_\alpha(a(t))$ définie sur un intervalle borné, alors l'image de c_1 sort de tout compact. Ceci est impossible car Y_α est à support compact. Donc la solution c_1 est définie sur $\mathbb{R}$; ceci entraîne que Y_α est complet. Donc $X_{|U_\alpha}$ est complet. □

Maintenant, on change de point de vue. À t fixé, on pose $\Phi_t^X(x) = c_x(t)$. L'application Φ_t^X consiste à regarder comment le système a évolué entre l'instant 0 et l'instant t.

Soit U un ouvert de M et I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 tel que l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi^X : & I \times U & \longrightarrow & M \\ & (t,\, x) & \longmapsto & \Phi^X(t,\, x) = \Phi_t^X(x) \end{array}$$

est bien définie. L'application Φ^X est appelé *flot* de X sur U.

Lemme 1.45. *Soient $s,\, t \in I$ et $x \in U$. Si $\Phi_t^X(x) \in U$ et $s+t \in I$ alors $\Phi_{s+t}^X(x) = \Phi_s^X \circ \Phi_t^X(x)$.*

Remarque 1.46. Si X est complet, alors $(\Phi_t^X)_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe à un paramètre de difféomorphismes de M.

Théorème 1.47 (du redressement). *Soit $X \in \Gamma_k(TM)$. Pour tout $x_0 \in M$ tel que $X(x_0) \neq 0$, il existe une carte locale $(U,\, \varphi)$ de M en x_0 tel que sur U, $X = \varphi^* E_1$.*

Démonstration. Comme le problème est local, on peut supposer que M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $x_0 = 0$ et que $X(x_0) = e_1$ où $(e_1, \ldots,\, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit Φ le flot de X dans un voisinage de x_0. L'application

$$\theta : (t,\, x_2, \ldots,\, x_n) \longmapsto \Phi_t(0,\, x_2, \ldots,\, x_n)$$

définie sur un voisinage de 0 est de classe $\mathscr{C}^k$. Comme

$$\begin{aligned} d_{(x_1,\ldots,x_n)}\theta(y_1,\ldots,y_n) &= y_1 \frac{\partial \Phi_{x_1}}{\partial x_1}(0,\, x_2, \ldots,\, x_n) + d_{(0,x_2,\ldots,x_n)}\Phi_{x_1}(0,\, y_2, \ldots,\, y_n) \\ &= y_1 X(\Phi_{x_1}(0,\, x_2, \ldots,\, x_n)) + d_{(0,x_2,\ldots,x_n)}\Phi_{x_1}(0,\, y_2, \ldots,\, y_n) \\ &= y_1 X(\theta(x_1,\, x_2, \ldots,\, x_n)) + d_{(0,x_2,\ldots,x_n)}\Phi_{x_1}(0,\, y_2, \ldots,\, y_n) \ , \end{aligned}$$

on a $d_0\theta(y_1, \ldots,\, y_n) = y_1 X(0) + (0,\, y_2, \ldots,\, y_n) = (y_1, \ldots,\, y_n)$, donc $d_0\theta = \mathrm{Id}$. Par le théorème d'inversion locale, θ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme local en 0. Pour tout $x = (x_1, \ldots,\, x_n)$ suffisamment proche de 0, on a $d_x\theta(e_1) = X(\theta(x))$, donc $\theta^* E_1 = X$ au voisinage de 0. $\square$

Proposition - définition 1.48. Soit X un champ de vecteurs et Φ^X son flot. Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^{k+1}(M,\, \mathbb{R})$, on a $\mathscr{L}_X f = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ \Phi_t^X)$.

Remarque 1.49. Cette définition permet d'étendre $\mathscr{L}_X$ aux formes différentielles.

Lemme 1.50.

Soit X et Y deux champs de vecteurs sur M. On note Φ et Ψ les flots de X et Y respectivement. On a :

$$\frac{d}{du}(\Phi_{-t} \circ \Psi_u \circ \Phi_t) = (\Phi_t^* Y) \circ (\Phi_{-t} \circ \Psi_u \circ \Phi_t) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}(\Phi_t^* Y) = \Phi_t^*[X,\, Y] \ .$$

Démonstration. Pour le premier point, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}(\Phi_{-t} \circ \Psi_u \circ \Phi_t(x)) &= T_{\Psi_u\circ\Phi_t(x)}\Phi_{-t}\left(\frac{d}{du}\Psi_u \circ \Phi_t(x)\right) = \left(T_{\Phi_{-t}\circ\Psi_u\circ\Phi_t(x)}\Phi_t\right)^{-1}(Y(\Psi_u \circ \Phi_t(x))) \\ &= (\Phi_t^* Y)(\Phi_{-t} \circ \Psi_u \circ \Phi_t(x)) \ . \end{aligned}$$

Pour montrer la seconde identité, on va utiliser la première. Soit Z le champ de vecteurs sur M définit par :

$$Z(x) = \frac{d}{ds}\Phi_s^* Y(x)\bigg|_{s=0} \quad \text{i.e} \quad Z(x) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}\frac{d}{du}\bigg|_{u=0}\left(\Phi_{-s}\circ\Psi_u\circ\Phi_s(x)\right) \quad .$$

Nous avons pour tout $f \in \mathscr{C}^{k+1}(M,\, \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_Z f(x) &= T_x f\left(\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}\frac{d}{du}\bigg|_{u=0}\left(\Phi_{-s}\circ\Psi_u\circ\Phi_s(x)\right)\right) \\
&= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} T_x f\left(\frac{d}{du}\bigg|_{u=0}\left(\Phi_{-s}\circ\Psi_u\circ\Phi_s(x)\right)\right) \\
&= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}\left(\frac{d}{du}\bigg|_{u=0} f\left(\Phi_{-s}\circ\Psi_u\circ\Phi_s(x)\right)\right) \quad .
\end{aligned}$$

Pour x fixé, on pose $g(s) = \Psi_u\circ\Phi_s(x)$ et $h(s) = \Phi_{-s}(g(s)) = \Phi(-s,\, g(s))$. On a

$$h'(s) = -X\left(\,\Phi_{-s}(g(s))\,\right) + T_{g(s)}\left(\Phi_{-s}\right)\left[T_{\Phi_s(x)}\Psi_u(\,X(\Phi_s(x))\,)\right] \quad ,$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_Z f(x) = \frac{d}{du}\bigg|_{u=0} T_{\Psi_u(x)}f(h'(0)) &= \frac{d}{du}\bigg|_{u=0}\left[-T_{\Psi_u(x)}f(\,X(\Psi_u(x))\,) + T_x(f\circ\Psi_u)(\,X(x)\,)\right] \\
= -\frac{d}{du}\bigg|_{u=0}\mathscr{L}_X f(\Psi_u(x)) &+ \frac{d}{du}\bigg|_{u=0}\mathscr{L}_X(f\circ\Psi_u)(x) \\
= -\mathscr{L}_Y\mathscr{L}_X f(x) &+ \mathscr{L}_X\mathscr{L}_Y f(x) \quad ,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\displaystyle\frac{d}{dt}(\Phi_t^* Y)\bigg|_{t=0} = Z = [X,\, Y]$. En appliquant Φ_s^* à cette égalité, nous avons

$$\Phi_s^*[X,\, Y] = \Phi_s^*\frac{d}{dt}(\Phi_t^* Y)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\Phi_s^*\circ\Phi_t^* Y = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\Phi_{t+s}^* Y = \frac{d}{ds}(\Phi_s^* Y) \quad .$$

□

Remarque 1.51. Si $X = Y$, nous avons $(\Phi_t^X)^* X = X$ c'est-à-dire $X(\,\Phi_t^X(x)\,) = T_x\Phi_t^X(\,X(x)\,)$.

Théorème 1.52. *Les flots générés par deux champs de vecteurs X et Y commutent si et seulement si $[X,\, Y] = 0$.*

Démonstration. Si les flots Φ^X et Φ^Y commutent, par le lemme **1.50** nous avons $Y = (\Phi_t^X)^* Y$, donc

$$[X,\, Y] = \frac{d}{dt}(\Phi_t^X)^* Y\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}Y\bigg|_{t=0} = 0 \quad .$$

Si $[X,\, Y] = 0$, nous avons $\frac{d}{dt}(\Phi_t^X)^* Y = 0$ donc $(\Phi_t^X)^* Y = Y$. Par le lemme **1.50** le flot de Y est $\Phi_{-t}^X\circ\Phi_u^Y\circ\Phi_t^X$ donc $\Phi_{-t}^X\circ\Phi_u^Y\circ\Phi_t^X = \Phi_u^Y$. □

1.4 Théorème de Frobenius

Le but de cette partie est de présenter le théorème de Frobenius. Ce théorème assure l'équivalence entre une *distribution intégrable* et une *distribution involutive*. On commence par définir tous ces termes puis nous donnant des résultat qui seront utiles pour la démonstration du théorème de Frobenius.

Soit M une variété $\mathscr{C}^\infty$ de dimension n et p un entier tel que $p \leq n$.

Définition 1.53. Une *distribution* (ou *champ de plans*) D de dimension p et de classe $\mathscr{C}^k$ dans une variété M est la donnée, pour tout point x de M d'un sous-espace vectoriel D_x de T_xM de dimension p qui dépend de manière $\mathscr{C}^k$ de x. C'est à dire pour tout $x_0 \in M$, il existe un voisinage U de x_0 et p champs de vecteurs $X_1, \dots, X_p$ de classe $\mathscr{C}^k$ tel que pour tout $x \in U$, D_x est engendré par les champs de vecteurs $X_1(x), \dots, X_p(x)$.

Exemple 1.54. Soit $X \in \Gamma_k(TM)$ un champ de vecteurs ne s'annulant pas sur M. Par le théorème **1.47**, la direction générée par X définie une distribution de dimension 1 sur M.

Définition 1.55. Une distribution D de rang p est *intégrable* si M est recouvert par des ouverts U tels qu'il existe une application submersive $\psi = \psi_U : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ vérifiant pour tout $x \in U$,

$$D_x = \mathrm{Ker}(T_x\psi : T_xU \longrightarrow T_{\psi(x)}\mathbb{R}^{n-p}) \ .$$

Proposition 1.56. *Une distribution D de rang p est intégrable si et seulement si pour tout $y \in M$, il existe un voisinage U de y de coordonnées canoniques $(x_1, \dots, x_n)$ tel que pour tout $x \in U$, D_x est engendrée par les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_p}$.*

Démonstration. On suppose que D est intégrable. Soit U un ouvert de M et une application $\psi = \psi_U : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ comme dans la définition **1.55**. L'espace $W = \psi^{-1}(0)$ est une sous-variété de M de dimension p. Pour tout $x \in W$, on a $T_xW = D_x$. Soit $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ une carte de M. Il existe un difféomorphisme entre $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap W)$ et un ouvert V de $\mathbb{R}^p$. Quitte à appliquer ce difféomorphisme, on peut supposer que $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap W) = V$. Comme $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_p}$ est la base de champs de vecteurs sur V, on déduit que $\varphi_\alpha^*\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \dots, \varphi_\alpha^*\left(\frac{\partial}{\partial x_p}\right)$ est la base de champs de vecteurs sur $W \cap U_\alpha$.

Pour la réciproque, quitte à prendre une carte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ de M, on peut supposer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'application $\psi : (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_{p+1}, \dots, x_n)$ est une submersion telle que pour tout $x \in U$, $D_x = \mathrm{Ker}(T_x\psi : T_xU \longrightarrow T_{\psi(x)}\mathbb{R}^{n-p})$. On déduit que D est intégrable. □

Définition 1.57. Une distribution D est dite *involutive* si pour tous champs de vecteurs X et Y se trouvant dans D, le champ de vecteurs $[X, Y]$ appartient à D.

Lemme 1.58.

Si D est une distribution involutive de dimension p sur M, alors pour tout $x_0 \in M$, il existe un voisinage U de x_0 de coordonnées canoniques $(x_1, \dots, x_n)$ tel que pour tout $x \in U$, D_x est engendré par les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_p}$.

Démonstration du lemme 1.58.

Première étape. Le but de cette étape est de construire les champs de vecteurs $X_1, \dots, X_p$ engendrant D sur U tel que $[X_j, X_k] = 0$.
On suppose que $x_0 = 0$. On note $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées canoniques de U et $Y_1, \dots, Y_p$ des champs de vecteurs engendrant D sur U. Quitte à composer par un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (voir le théorème **1.3**) on peut supposer qu'au point 0, $Y_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$. Proche de 0, on peut écrire $Y_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\frac{\partial}{\partial x_k}$ où $A = (a_{jk})_{1\leq j,\, k\leq p}$ est une matrice proche de l'identité. On note $B = (b_{jk})_{1\leq j,\, k\leq p}$ l'inverse de A. On définit une nouvelle base de D sur U constitué des champs de vecteurs $X_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} b_{jk}Y_k$ pour $j \in \{1, \dots, p\}$. On a :

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=p+1}^{n} f_{jk}\frac{\partial}{\partial x_k}$$

où les f_{jk} sont des fonctions s'annulant en 0 et $[X_j,\, X_k] = \displaystyle\sum_{l=p+1}^{n} (X_j f_{kl} - X_k f_{jl}) \frac{\partial}{\partial x_l}$. Puisque D est involutif, $[X_j,\, X_k] \in D$. Donc

$$[X_j,\, X_k] = \sum_{l=1}^{p} e_{jkl} X_l = \sum_{l=1}^{p} e_{jkl} \left(\frac{\partial}{\partial x_l} + \sum_{r=p+1}^{n} f_{lr} \frac{\partial}{\partial x_r} \right) \quad ,$$

c'est à dire $\displaystyle\sum_{l=1}^{p} e_{jkl} \frac{\partial}{\partial x_l} = 0$. Ainsi par l'indépendance des $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$, nous avons $e_{jkl} = 0$ pour tout $k \in \{1, \ldots,\, p\}$. Donc $[X_j,\, X_k] = 0$.

Deuxième étape. Montrons que si $(X_1, \ldots,\, X_p)$ est un p-uplet de champs de vecteurs vérifiant $[X_j,\, X_k] = 0$ alors il existe un difféomorphisme local f en 0 tel que au voisinage de 0 on ait $f^* X_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

Soit $\Phi^1, \ldots,\, \Phi^p$ les flots générés par les champs de vecteurs $X_1, \ldots,\, X_p$ respectivement. Soit N une sous variété de M de dimension $n-p$ qui correspond localement à $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-p}$ et l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^p \times N & \longrightarrow & M \\ & (x_1, \ldots,\, x_p,\, y) & \longmapsto & \Phi^1_{x_1} \circ \ldots \circ \Phi^p_{x_p}(y) \end{array} .$$

On a $d_{(0,\,y)} f(u_1, \ldots,\, u_p,\, Y) = u_1\, X_1(y) + \ldots + u_p\, X_p(y) + Y$. En effet lorsque $p = 2$, nous avons

$$\begin{aligned} d_{(t,\,s,\,y)} f(u_1,\, u_2,\, Y) &= u_1 \frac{\partial \Phi^1}{\partial t}(t,\, \Phi^2(s,\, y)) + \left(d_{\Phi^2(s,\,y)} \Phi^1_t \circ d_{(s,\,y)} \Phi^2 \right) (u_2,\, Y) \\ &= u_1\, X_1 \left(\Phi^1(t,\, \Phi^2(s,\, y)) \right) + \left(d_{\Phi^2(s,\,y)} \Phi^1_t \right) \left(u_2 \frac{\partial \Phi^2}{\partial s}(s,\, y) + (d_y \Phi^2_s)(Y) \right) \\ &= u_1\, X_1 \left(\Phi^1(t,\, \Phi^2(s,\, y)) \right) + \left(d_{\Phi^2(s,\,y)} \Phi^1_t \right) \left(u_2\, X_2 \left(\Phi^2(s,\, y) \right) + (d_y \Phi^2_s)(Y) \right) \ ; \end{aligned}$$

on conclut en prenant $s = t = 0$.
L'application $d_{(0,\,y)} f : \mathbb{R}^p \times T_y N \longrightarrow T_y M$ est un isomorphisme, donc f est un difféomorphisme local en 0. Comme les flots Φ^j commutent, nous avons

$$d_{(x,\,y)} f \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Phi^1_{x_1} \circ \ldots \circ \Phi^p_{x_p} \right)(y) = \frac{\partial \Phi^j_{x_j}}{\partial x_j} \left(\Phi^1_{x_1} \circ \ldots \circ \widehat{\Phi^j_{x_j}} \circ \ldots \circ \Phi^p_{x_p}(y) \right)$$

où la notation $\widehat{\Phi^j_{x_j}}$ veut dire que le terme $\Phi^j_{x_j}$ a été omis. Ainsi

$$d_{(x,\,y)} f \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = X_j \left(\Phi^j_{x_j} \circ \Phi^1_{x_1} \circ \ldots \circ \widehat{\Phi^j_{x_j}} \circ \ldots \circ \Phi^p_{x_p}(y) \right) = X_j \left(f(x, y) \right) \quad ,$$

donc $f^* X_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$; ce qui termine la démonstration. □

Théorème 1.59 (Frobenius).

Une distribution D sur une variété M est intégrable si et seulement si elle est involutive.

Démonstration. Le sens "involutive implique intégrable" découle du lemme **1.58** et de la proposition **1.56**. On suppose que D est intégrable. Soit U un ouvert de M et $\psi = \psi_U : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ une application submersive tel que pour tout $x \in U,\ D_x = \mathrm{Ker}(\, T_x\psi : T_x U \longrightarrow T_{\psi(x)} \mathbb{R}^{n-p}\,)$. L'espace $W = \psi^{-1}(0)$ est une sous variété de M de dimension p. Pour tout $x \in W$, on a $T_x W = D_x$.
Soit $X,\, Y$ deux champs de vecteurs de M se trouvant dans D. Les champs de vecteurs $X_{|W}$ et $Y_{|W}$ sont dans TW. Par la proposition **1.40**, $[X,\, Y]_{|W}$ est dans TW, donc pour tout $z \in W$, $[X,\, Y](z) \in D_z$. Ainsi, nous avons $[D,\, D] \subset D$; donc D est involutive. □

2 Variétés complexes

Pour énoncer le théorème de Newlander – Nirenberg qui sera vu dans le chapitre 3, nous aurons besoin de la notion de structure presque-complexe sur les variétés réelles et complexes.
Nous commençons ce chapitre par évoquer la notion de structure complexe sur un espace vectoriel. Cette notion nous aidera à définir la notion de structure presque-complexe sur une variété. Dans la deuxième partie, nous présenterons rapidement les fonctions holomorphes à une et plusieurs variables. La troisième partie s'orientera sur les définitions de variété analytique complexe, de fibré vectoriel complexe et de fibré vectoriel holomorphe. On terminera ce chapitre par présenter les structures presque-complexes.

Soit n un entier naturel non nul. Dans ce chapitre, on identifie $\mathbb{R}^{2n}$ avec $\mathbb{C}^n$ à travers l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{2n} & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ (x_1,\, y_1, \dots,\, x_n,\, y_n) & \longmapsto & (x_1 + iy_1, \dots,\, x_n + iy_n) \end{array} . \tag{2.1}$$

2.1 Structures complexes sur les espaces vectoriels

On commence par définir la notion de structure complexe sur un espace vectoriel réel puis nous définissons le complexifié d'un espace vectoriel réel. On termine cette partie par déterminer les sous-espaces propres d'une structure complexe.

2.1.1 Définitions et exemples

Soit E et F deux espaces vectoriels réels de dimension paire.

Définition 2.1. Un endomorphisme $J : E \longrightarrow E$ tel que $J^2 = J \circ J = -\operatorname{Id}_E$ est appelé *structure complexe* sur E.

Exemple 2.2. Si E est l'espace vectoriel réel sous-jacent d'un espace vectoriel complexe, alors l'application $x \longmapsto i \cdot x$ définit une structure complexe sur E. Réciproquement :

Lemme 2.3. *Si J est une structure complexe sur E, alors E possède une structure d'espace vectoriel complexe.*

Démonstration. La structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel sur E est donné par l'action de $\mathbb{C}$ sur E définie par $(a + ib) \cdot x = ax + bJ(x)$ où $a,\, b \in \mathbb{R}$ et $x \in E$. □

Ainsi, la donnée d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E est équivalente à la donnée $(E,\, J)$ d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'une structure complexe J.

Exemple 2.4. Compte tenu de l'identification **(2.1)**, on définit la structure complexe I sur $\mathbb{R}^{2n}$ par :

$$I(x_1,\, y_1,\, x_2,\, y_2, \dots,\, x_n,\, y_n) = (-y_1,\, x_1,\, -y_2,\, x_2, \dots,\, -y_n,\, x_n) .$$

Proposition 2.5. *Soit J et J' des structures complexes sur E et F respectivement. Si l'on considère E et F comme des espaces vectoriels complexes, l'application $\mathbb{R}$-linéaire $f : E \longrightarrow F$ est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si $J' \circ f = f \circ J$.*

Démonstration. La proposition vient du fait suivant : lorsqu'on considère E et F comme des espaces vectoriels complexes, les applications J et J' correspondent à la multiplication par i sur E et F respectivement. □

Proposition 2.6. *Soit J une structure complexe sur E. Un sous-espace vectoriel réel F de E est invariant par J si et seulement si F est un sous-espace vectoriel complexe de E lorsque E est vu comme espace vectoriel complexe.*

2.1.2 Complexification d'un espace vectoriel réel

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. On note $E^{\mathbb{C}} = E \otimes \mathbb{C}$ le complexifié du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
L'espace E est naturellement inclus dans $E^{\mathbb{C}}$ à travers l'application $x \longmapsto x \otimes 1$. Soient $\lambda,\ \lambda' \in \mathbb{C}$ et $x \in E$. On définit la conjugaison complexe de $x \otimes \lambda$ par

$$\overline{x \otimes \lambda} = x \otimes \overline{\lambda}$$

et la multiplication de $x \otimes \lambda$ par λ' en posant $\lambda'(x \otimes \lambda) = x \otimes (\lambda' \lambda)$. Donc $E^{\mathbb{C}}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Si $\dim_{\mathbb{R}}(E) = n$, alors $\dim_{\mathbb{C}}(E^{\mathbb{C}}) = n$.

Notation. Pour tout $x,\ y \in E$, on notera l'élément $x \otimes 1 + y \otimes i$ de $E^{\mathbb{C}}$ par $x + iy$.

2.1.3 Espaces propres d'une structure complexe

Soit E un espace vectoriel réel de dimension paire. Dans cette partie, on suppose que E est muni d'une structure complexe J.

On étend J par $\mathbb{C}$-linéarité sur $E^{\mathbb{C}}$ en posant pour tout $x,\ y \in E,\ J(x + iy) = J(x) + iJ(y)$. On a encore $J^2 = -\operatorname{Id}_{E^{\mathbb{C}}}$.

Définition 2.7. Sur $E^{\mathbb{C}}$, J possède deux valeurs propres $\pm i$. Les espaces propres $E^{1,0}$ et $E^{0,1}$ associés à i et $-i$ respectivement sont définis par

$$E^{1,0} = \{u \in E^{\mathbb{C}} \mid J(u) = iu\} \quad \text{et} \quad E^{0,1} = \{u \in E^{\mathbb{C}} \mid J(u) = -iu\} \ .$$

Proposition 2.8. *On a $E^{\mathbb{C}} = E^{1,0} \oplus E^{0,1}$, $E^{1,0} = \{x - iJ(x) \mid x \in E\}$ et $E^{0,1} = \{x + iJ(x) \mid x \in E\}$.*

Démonstration. L'endomorphisme J admet $X^2 + 1$ comme polynôme minimal. Donc $E^{\mathbb{C}} = E^{1,0} \oplus E^{0,1}$.
Soit $u \in E^{\mathbb{C}}$. Il existe un unique couple $(x,\ y) \in E \times E$ tel que $u = x + iy$. On suppose que u est un élément de $E^{1,0}$. Nous avons : $J(u) = J(x) + iJ(y) = iu = -y + ix$, donc $[J(x) + y] + i[J(y) - x] = 0$.
Ainsi $y = -J(x)$ et $u = x - iJ(x)$; donc $E^{1,0} = \{x - iJ(x) \mid x \in E\}$. □

Remarque 2.9. Les applications

$$\begin{array}{rccc} p_1 : & E^{\mathbb{C}} & \longrightarrow & E^{1,0} \\ & u & \longmapsto & \frac{1}{2}(u - iJ(u)) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} p_2 : & E^{\mathbb{C}} & \longrightarrow & E^{0,1} \\ & u & \longmapsto & \frac{1}{2}(u + iJ(u)) \end{array}$$

sont les projections de $E^{\mathbb{C}}$ sur $E^{1,0}$ et $E^{0,1}$ respectivement.

Lemme 2.10. *La conjugaison complexe sur $E^{\mathbb{C}}$ induit un isomorphisme entre $E^{1,0}$ et $E^{0,1}$.*

Remarque 2.11. Il existe un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espace vectoriels entre $(E^{1,0},\ i)$ et $(E,\ J)$. De même, $(E^{0,1},\ i)$ est isomorphe à $(E,\ -J)$.

2.2 Fonctions holomorphes

Dans cette partie, on donne les définitions et quelques propriétés des fonctions holomorphes à une et plusieurs variables. Nous présentons également la version holomorphe du théorème d'inversion locale.

2.2.1 Fonctions holomorphes d'une variable complexe

On identifie $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$ à travers l'application $(x,\, y) \longmapsto z = x + iy$. On définit les opérateurs $\dfrac{\partial}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ par

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \ .$$

On note Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition 2.12. Une fonction $f \in \mathscr{C}^1(\Omega,\, \mathbb{C})$ est dite *holomorphe* si elle satisfait l'équation $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.

Théorème 2.13 (Cauchy-Green-Pompeiu). *Soit $K \subset \Omega$ un compact à bord $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Soit $f \in \mathscr{C}^1(\Omega,\, \mathbb{C})$, pour tout $a \in K$, on a*

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a}\, dz - \frac{1}{\pi}\int_K \frac{1}{z-a}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\, d\lambda(z) \ , \tag{2.2}$$

où $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$.

Remarque 2.14. Lorsque f est holomorphe, on obtient la formule de Cauchy

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a}\, dz \ . \tag{2.3}$$

Corollaire 2.15. Les fonctions holomorphes dont des fonctions analytiques.

Pour la démonstration de cet énoncé, il faut voir le corollaire 2.23.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction analytique au voisinage de 0. Il existe $r > 0$ tel que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ tel que $|x| < r$ on ait

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k \quad \text{où} \quad a_k \in \mathbb{R} \ .$$

Si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $|z| < r$, alors on peut définir f en z en posant $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k$.

Théorème 2.16. *Soient $r \in \mathbb{R}$ un réel strictement positif. Toute fonction $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ développable en série entière dans le disque $\mathbb{D}(0,\, r)$ définit une fonction holomorphe dans le disque $\mathbb{D}(0,\, r)$.*

Proposition 2.17. *Soit $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k$ une série entière centrée à l'origine de rayon de convergence R. Si au moins un des a_k est non nul pour $k \geq 1$, alors il existe un rayon $r < R$ tel que :*

1. *lorsque $a_0 = 0$, si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|z| < r$ et $f(z) = 0$ alors $z = 0$;*
2. *lorsque $a_0 \neq 0$, si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|z| < r$ alors $f(z) \neq 0$.*

Voici maintenant le théorème du prolongement analytique.

Théorème 2.18. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $f,\, g$ deux fonctions analytiques sur Ω. Si f et g ont les mêmes valeurs sur un sous-ensemble $E \subset \Omega$ qui admet un point d'accumulation dans Ω, alors les fonctions f et g coïncident dans Ω.*

2.2.2 Fonctions holomorphes à plusieurs variables

On identifie $\mathbb{R}^{2n}$ avec $\mathbb{C}^n$ à travers l'application **(2.1)**. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$.

Définition 2.19. Une fonction $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{C})$ est *holomorphe* si elle est séparément holomorphe, c'est-à-dire pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, lorsqu'on fixe les variables $z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_n$, l'application $z_j \longmapsto f(z_1, \ldots, z_{j-1}, z_j, z_{j+1}, \ldots, z_n)$ est holomorphe.
On note $\mathscr{O}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes définies sur Ω.

Remarque 2.20. Soit m, n deux entiers positifs. On dit qu'une fonction $f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ est holomorphe si les fonctions $f_j : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ sont holomorphes.

Définition 2.21. Soit $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ une fonction holomorphe. On dit que f est un *biholomorphisme* si f est bijective et l'application f^{-1} est holomorphe.

Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n_+$. Le *polydisque* $\mathbb{D}(a, r)$ est le produit $\mathbb{D}(a_1, r_1) \times \ldots \times \mathbb{D}(a_n, r_n)$ et sa frontière $\partial\mathbb{D}(a, r)$ est

$$\bigcup_{j=1}^{n} \mathbb{D}(a_1, r_1) \times \ldots \times \mathbb{D}(a_{j-1}, r_{j-1}) \times C(a_j, r_j) \times \mathbb{D}(a_{j+1}, r_{j+1}) \times \ldots \times \mathbb{D}(a_n, r_n) \ .$$

La *frontière distingué* de $\mathbb{D}(a, r)$ est $\Gamma(a, r) = C(a_1, r_1) \times \ldots \times C(a_n, r_n)$.

Théorème 2.22 (Formule de Cauchy sur les polydisques). *Si $\overline{\mathbb{D}}(a, r)$ est un polydisque fermé inclus dans Ω, pour tout $f \in \mathscr{O}(\Omega)$, et tout $w \in \mathbb{D}(a, r)$ nous avons*

$$f(w) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma(a,r)} \frac{f(z_1, \ldots, z_n)}{(z_1 - w_1) \ldots (z_n - w_n)} \, d\lambda(z_1) \ldots d\lambda(z_n) \ . \tag{2.4}$$

Pour la démonstration de la formule de Cauchy **(2.4)**, on applique n fois la formule de Cauchy **(2.3)**.

Corollaire 2.23. Les fonctions holomorphes sont des fonctions analytiques complexes, c'est-à-dire des fonctions localement développables en séries entières. Elles sont en particulier de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ et $\overline{\mathbb{D}}(a, r) \subset \Omega$ un polydisque fermé. Soit $z \in \Gamma(a, r)$ et $w \in \mathbb{D}(a, r)$, on a

$$(z_j - w_j)^{-1} = (z_j - a_j)^{-1} \left(1 - \frac{w_j - a_j}{z_j - a_j}\right)^{-1} = \sum_{\alpha_j = 0}^{\infty} (w_j - a_j)^{\alpha_j} (z_j - a_j)^{-\alpha_j - 1} \ .$$

En notant α le multi-indice $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, nous avons

$$f(w) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} b_\alpha \, (w - a)^\alpha$$

où

$$b_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma(a,r)} \frac{f(z_1, \ldots, z_n)}{(z_1 - w_1)^{\alpha_1 + 1} \ldots (z_n - w_n)^{\alpha_n + 1}} \, d\lambda(z_1) \ldots d\lambda(z_n) = \frac{f^{(\alpha)}(a)}{\alpha!} \ .$$

□

Comme dans le cas des fonctions d'une variable complexe, si $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ est analytique, alors f est holomorphe. On a encore le théorème du prolongement analytique.

Théorème 2.24. *Soit Ω un ouvert* connexe *de $\mathbb{C}^n$ et f une fonction holomorphe sur Ω. Si f s'annule sur un ouvert de Ω, alors f est identiquement nulle sur Ω.*

2.2.3 Le théorème d'inversion locale pour les fonctions holomorphes

Soit n, m deux entiers positifs, $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ une fonction holomorphe et $z_0 \in \mathbb{C}^n$.

Théorème 2.25 (Inversion locale). *On suppose que $n = m$. Si la différentielle $d_{z_0}f$ de f en z_0 est bijective, alors il existe un voisinage U de z_0 et un voisinage V de $f(z_0)$ tel que $f : U \longrightarrow V$ est un biholomorphisme.*

Démonstration. Par le théorème d'inversion locale **1.1**, il existe de tels ouverts U et V tel que $f : U \longrightarrow V$ est un difféomorphisme. On a $d_{f(z_0)}(f^{-1}) = (d_{z_0}f)^{-1}$. Comme l'application $d_{z_0}f$ est $\mathbb{C}$-linéaire et bijective, on conclut que $d_{f(z_0)}(f^{-1})$ est $\mathbb{C}$-linéaire. Donc $f^{-1} : V \longrightarrow U$ est holomorphe. □

Théorème 2.26 (Formes normales). *On suppose ici que $z_0 = 0$.*

1. *Si f est une immersion en z_0, alors il existe un biholomorphisme φ définie au voisinage de $f(z_0)$ à valeur dans $\mathbb{C}^m$ tel que $\varphi \circ f(z) = (z, 0)$.*

2. *Si f est une submersion en z_0, alors il existe un biholomorphisme ψ entre deux ouverts de $\mathbb{C}^n$ à valeur dans un voisinage de z_0 tel que $f \circ \psi(z_1, \ldots, z_n) = (z_1, \ldots, z_m)$.*

Démonstration. On repend les arguments utilisés dans la démonstration du théorème **1.3** tout en remplaçant l'utilisation du théorème d'inversion locale **1.1** par le théorème d'inversion locale holomorphe **2.25**. □

2.3 Variétés analytiques complexes

Dans cette partie, nous reprenons plusieurs points abordés dans le chapitre **1** sous un nouveau point de vue. Comme introduit en début de chapitre, nous présentons les définitions de variétés analytique complexe, de fibré vectoriel complexe et de fibré vectoriel holomorphe.

2.3.1 Définition et exemples

Définition 2.27. On dit que V est une *variété analytique complexe* de dimension (complexe) n si :

1. l'espace topologique V est une variété différentielle munie d'un atlas de cartes $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{2n}$;

2. lorsqu'on identifie $\mathbb{R}^{2n}$ à $\mathbb{C}^n$ via **(2.1)**, les changements de cartes $\varphi_{\alpha\beta} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ sont holomorphes.

Remarque 2.28. Cet atlas de carte est appelé *atlas de cartes holomorphes* de V.

Définition 2.29. On conserve les notations de la définition **2.27**. Soit M une partie de V. On dit que M est une *sous-variété complexe* de V de dimension complexe p si M est une sous-variété différentielle de V de dimension réelle $2p$ tel que les applications de changement de cartes $\varphi_{\alpha\beta} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta \cap M) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta \cap M)$ sur M sont holomorphes.

Exemples 2.30. Les ouvert de $\mathbb{C}^n$ sont des variétés analytiques complexes.

Espace projectif complexe. L'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ de dimension n est l'ensemble des droites complexes de $\mathbb{C}^{n+1}$ que l'on peut traduire comme étant le quotient de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence qui identifie deux vecteurs colinéaires sur $\mathbb{C}$. On a $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$.
On note $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ la surjection canonique. À travers π, on munit $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ de la topologie quotient qui est séparée. Pour tout $z = (z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, on note $[z_0 : z_1 : \ldots : z_n]$ un point de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. En particulier pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on a $[\lambda z_0 : \lambda z_1 : \ldots : \lambda z_n] = [z_0 : z_1 : \ldots : z_n]$.

Pour tout $\alpha \in \{0, \dots, n\}$, on pose $U_\alpha = \{ [z_0 : z_1 : \dots : z_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \ : \ z_\alpha \neq 0\}$. Les ouverts U_α recouvrent bien $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. L'application

$$\begin{array}{cccc} \varphi_\alpha : & U_\alpha & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & [z_0 : z_1 : \dots : z_n] & \longmapsto & \left(\dfrac{z_0}{z_\alpha}, \dots, \dfrac{z_{\alpha-1}}{z_\alpha}, \dfrac{z_{\alpha+1}}{z_\alpha}, \dots, \dfrac{z_n}{z_\alpha} \right) \end{array}$$

est un homéomorphisme d'inverse $(u_0, \dots, \widehat{u_\alpha}, \dots, u_n) \longmapsto [u_0 : \dots : u_{\alpha-1} : 1 : u_{\alpha+1} : \dots : u_n]$.
Pour tout $\alpha, \beta \in \{0, \dots, n\}$ tel que $\alpha \leq \beta$, on définit l'application de transition $\varphi_{\alpha\beta}$ par

$$\begin{array}{cccc} \varphi_{\alpha\beta} : & \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) & \longrightarrow & \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \\ & (z_0, \dots, \widehat{z_\alpha}, \dots, z_n) & \longmapsto & \left(\dfrac{z_0}{z_\beta}, \dots, \dfrac{z_{\alpha-1}}{z_\beta}, \dfrac{1}{z_\beta}, \dfrac{z_{\alpha+1}}{z_\beta}, \dots, \dfrac{z_{\beta-1}}{z_\beta}, \dfrac{z_{\beta+1}}{z_\beta}, \dots \dfrac{z_n}{z_\beta} \right) \end{array}.$$

Soit $K_\beta = \{(z_0, \dots, \widehat{z_\alpha}, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \ : \ z_\beta = 0\}$. L'application $\varphi_{\alpha\beta}$ est bijective et holomorphe sur $\mathbb{C}^n \setminus K_\beta$. Donc $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est une variété complexe.

2.3.2 Fibrés vectoriels complexes

Soit M une variété différentielle et p, n deux entiers tel que $p \leq n$.
Un *fibré vectoriel complexe* de classe $\mathscr{C}^\infty$ et de rang n sur M est la donnée d'une famille $(E_x)_{x \in M}$ d'espaces vectoriels complexes de dimension n et d'une structure de variété $\mathscr{C}^\infty$ sur $E = \bigcup\limits_{x \in M} E_x$ telle que

1. La projection $\pi : E \longrightarrow M$ envoyant E_x sur x est $\mathscr{C}^\infty$;
2. Pour tout $x_0 \in M$, il existe un ouvert U de M contenant x_0 et un difféomorphisme $\psi_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{C}^n$ prenant en argument l'espace vectoriel E_x et l'envoyant de manière isomorphe sur $\{x\} \times \mathbb{C}^n$ pour tout $x \in U$.

On dit que U est un ouvert de trivialisation et ψ_U une trivialisation de E au dessus de U.

Remarque 2.31. Un fibré vectoriel complexe est un fibré vectoriel réel muni d'une structure complexe fibre à fibre variant de manière lisse.

Un *sous-fibré vectoriel complexe* F de E de rang p est une famille $(F_x)_{x \in M}$ où F_x est un sous-espace vectoriel complexe de E_x de dimension p tel que $F = \bigcup\limits_{x \in M} F_x$ est une sous-variété de E ; F est un fibré vectoriel complexe. Dire que F est une sous-variété de E est équivalent à dire que pour tout $x \in M$, il existe une trivialisation $\psi_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{C}^n$ tel que, en notant $F_U = \pi^{-1}(U) \cap F$, la restriction $\psi_{U|F_U} : F_U \longrightarrow U \times \mathbb{C}^p$ envoie F_x de manière isomorphe sur $\{x\} \times \mathbb{C}^p$.

2.3.3 Fibrés vectoriels holomorphes

Soit V une variété analytique complexe. Soit U un ouvert de V et $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ un atlas de cartes holomorphes de V. On dit qu'une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est *holomorphe* si pour tout α, l'application $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ est holomorphe sur $\varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$.

Définition 2.32. Un *fibré vectoriel holomorphe* $\pi : E \longrightarrow V$ de rang n est un fibré vectoriel complexe de rang n tel que pour toutes paires de trivialisations $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ et $\psi_\beta : \pi^{-1}(U_\beta) \longrightarrow U_\beta \times \mathbb{C}^n$ de E, l'application $\psi_{\alpha\beta} = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ est biholomorphe.

Remarque 2.33. L'application ψ_α est appelée *trivialisation holomorphe* de π. Pour tout $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, l'application $\psi_{\alpha\beta}(x) := (\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1})(x, \cdot) : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ est $\mathbb{C}$-linéaire.
Si $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_\alpha$ est un atlas de cartes holomorphes de V, alors $\left(\pi^{-1}(U_\alpha), (\varphi_\alpha \times \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}) \circ \psi_\alpha \right)_\alpha$ est un atlas de cartes holomorphe de E.

Soient ξ_E et ξ_F deux fibrés vectoriels holomorphes sur V de projection $\pi_E : E \longrightarrow V$ et $\pi_F : F \longrightarrow V$. Une application holomorphe f de ξ_E vers ξ_F est une application holomorphe $f : E \longrightarrow F$ tel que $f : E_x \longrightarrow F_x$ est $\mathbb{C}$-linéaire pour tout $x \in M$.

On dit que F est un *sous-fibré vectoriel holomorphe* de E de rang p si F est un sous fibré vectoriel complexe de E de rang p et une sous-variété complexe de E.

2.4 Structure presque complexe sur une variété

On commence cette partie par définir la notion de structure presque-complexe. Dans un deuxième temps, nous montrerons qu'il existe naturellement une structure presque-complexe sur la variété réelle sous-jacente d'une variété analytique complexe. On terminera cette partie par présenter la notion d'automorphisme infinitésimaux d'une structure presque-complexe.
Toutes les notions abordées dans cette partie seront utilisées dans le chapitre 3.

2.4.1 Premières définitions

Définition 2.34. Une *structure presque-complexe* sur une variété différentielle M de dimension paire est la donnée d'un endomorphisme $J : TM \longrightarrow TM$ de fibrés vectoriels tel que $J^2 = -\operatorname{Id}_{TM}$, c'est-à-dire pour tout $x \in M$, l'application

$$J_x = J(x, \cdot) : T_xM \longrightarrow T_xM$$

est une structure complexe pour T_xM. Le couple $(M,\ J)$ est appelé *variété presque-complexe.*

Ainsi, d'après le lemme 2.3, une variété différentielle ayant une structure presque-complexe équivaut à prescrire une structure de fibré vectoriel complexe sur le fibre tangent réel.

Notation. Si M est une variété différentielle, on note $T^{\mathbb{C}}M = TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ le complexifié du fibré tangent TM ; $T^{\mathbb{C}}M$ est un fibré vectoriel complexe.

Soit M une variété différentielle de dimension paire munie d'une structure presque-complexe J.

Notation. On note $T_J^{1,0}M$ (resp. $T_J^{0,1}M$) le sous-fibré vectoriel complexe de $T^{\mathbb{C}}M$ défini comme le fibré des vecteurs propres de J pour la valeur propre i (resp. $-i$).
Si l'endomorphisme J est sous-entendu, on notera $T^{1,0}M$ (resp. $T^{0,1}M$) l'espace $T_J^{1,0}M$ (resp. $T_J^{0,1}M$).

Définition 2.35. On appelle *champ de vecteurs de type* $(1,\ 0)$ (resp. $(0,\ 1)$) les sections de $T^{1,0}M$ (resp. $T^{0,1}M$).

Par la proposition 2.8, l'espace $T^{1,0}M$ est engendrée par les $u - iJ(u)$ où $u \in TM$. Comme fibré vectoriel réel, le fibré $T^{1,0}M$ est isomorphe à TM à travers l'application

$$\begin{array}{ccc} TM & \longrightarrow & T^{1,0}M \\ u & \longmapsto & \dfrac{1}{2}(u - iJ(u)) \end{array} .$$

Par la remarque 2.11, cette application identifie les opérateurs i (multiplication par i) sur $T^{1,0}M$ et J sur TM.

2.4.2 Structure complexe d'une variété complexe

Soit V une variété analytique complexe de dimension n et $x \in V$. Soit $(U_\alpha,\ \varphi_\alpha)$ une carte de V en x. L'espace T_xV est isomorphe à $\mathbb{R}^{2n}$ à travers l'application $T_x\varphi_\alpha$. En faisant les calculs dans $\mathbb{C}^n$, puis en les interprétant dans T_xV à travers la chaîne d'identifications $T_xV \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{2n} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n$, on munit T_xV d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Pour $(U_\beta,\ \varphi_\beta)$ une autre carte de V en x, on a

$$T_x\varphi_\beta = T_{\varphi_\alpha(x)}\varphi_{\alpha\beta} \circ T_x\varphi_\alpha \quad .$$

Comme $\varphi_{\alpha\beta}$ est biholomorphe, l'application $T_{\varphi_\alpha(x)}\varphi_{\alpha\beta}$ est un isomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire. Donc la structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel sur T_xV est indépendante du choix de la carte.

Remarque 2.36. Le fibré tangent d'une variété analytique complexe possède une structure de fibré vectoriel holomorphe.

Soit $T^{\mathbb{R}}V$ le fibré tangent de V vu comme variété réelle. L'espace $T_x^{\mathbb{R}}V$ est l'espace vectoriel réel sous-jacent de T_xV. On peut donc munir $T_x^{\mathbb{R}}V$ d'une structure complexe J_x. On définit pour tout $X \in T_x^{\mathbb{R}}V$,

$$J_x(X) = \varphi_\alpha^*(\, I(\, \varphi_{\alpha *}(X)\,)\,)$$

où I est la structure complexe sur $\mathbb{R}^{2n}$ définit dans l'exemple **2.4**. En effet :

$$\begin{aligned} J_x^2(X) &= \varphi_\alpha^*(\, I(\, \varphi_{\alpha *}(J_x(X))\,)\,) \\ &= \varphi_\alpha^*(\, I(\, \varphi_{\alpha *}[\varphi_\alpha^*(\, I(\, \varphi_{\alpha *}(X)\,)\,)]\,)\,) \\ &= \varphi_\alpha^*(\, I^2[\, \varphi_{\alpha *}(X)\,]\,) \\ &= \varphi_\alpha^*[\, \varphi_{\alpha *}(-X)\,] = -X \ \ . \end{aligned}$$

Globalement, nous avons :

Proposition 2.37. *Une variété complexe V de dimension complexe n fournit une structure presque-complexe J sur sa variété réelle sous-jacente.*

Démonstration. On définit l'endomorphisme $J : T^{\mathbb{R}}V \longrightarrow T^{\mathbb{R}}V$ en posant pour tout $x \in V$, $J(x,\, \cdot) = J_x$. □

Remarque 2.38. L'endomorphisme J est appelé *structure complexe* de V. On note TV le couple $(T^{\mathbb{R}}V,\, J)$.

Proposition 2.39. *Soit V est une variété complexe de dimension complexe n. Le fibré vectoriel complexe $T^{1,0}V$ est isomorphe au fibré tangent holomorphe TV.*

Démonstration. Soit $(z_1, \ldots,\, z_n)$ les coordonnées complexes de V dans une carte holomorphes $(U_\alpha,\, \varphi_\alpha)$ où $z_j = x_j + i\, y_j$ avec $x_j,\, y_j \in \mathbb{R}$. Sur U_α, le fibré tangent holomorphe est engendré par les éléments

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \quad \text{pour } \ j \in \{1, \ldots,\, n\} \ \ .$$

On note $(x_1,\, y_1, \ldots,\, x_n,\, y_n)$ les coordonnées réel de V dans la carte holomorphe $(U_\alpha,\, \varphi_\alpha)$. Pour tout $x \in U_\alpha$, l'espace $T_x^{\mathbb{R}}V$ est engendré par les $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ et $\dfrac{\partial}{\partial y_j}$. La structure presque-complexe sur $T_x^{\mathbb{R}}V$ est donnée par

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial y_j} \ \text{ et } \ J\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j} \ \text{ pour } \ j \in \{1, \ldots,\, n\} \ \ .$$

Ainsi, par la proposition **2.8**, l'espace $T_x^{1,0}V$ est engendré par les $\dfrac{\partial}{\partial x_j} - iJ\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right) = 2\dfrac{\partial}{\partial z_j}$ où $j \in \{1, \ldots,\, n\}$. Donc $T^{1,0}V$ est isomorphe à TV. □

Remarque 2.40. L' espace $T_x^{0,1}V$ est engendré par les $\dfrac{\partial}{\partial x_j} + iJ\left(\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right) = 2\dfrac{\partial}{\partial \overline{z_j}}$.

Définition 2.41. Un *champ de vecteurs holomorphe* sur une variété complexe V est un champ de vecteurs Z de type $(1,\, 0)$ tel que Zf est holomorphe pour toute fonction holomorphe f définie localement. Si on écrit

$$Z = \sum_{k=1}^{n} f_k \frac{\partial}{\partial z_k}$$

dans une base de coordonnées $(z_1, \ldots,\, z_n)$, alors Z est holomorphe si et seulement si les fonctions f_k sont holomorphes.

Remarque 2.42. On dit qu'un champ de vecteurs $X \in T^{\mathbb{R}}V$ est réel holomorphe si et seulement si le champ de vecteurs $X - iJX$ est holomorphe.

Exemple 2.43. Soit $(z_1, \ldots, z_n)$ les coordonnées complexes de V dans une carte holomorphe où $z_j = x_j + iy_j$ avec $x_j,\, y_j \in \mathbb{R}$. Soit $X \in T^{\mathbb{R}}V$ un champ de vecteurs qui s'écrit sous la forme

$$X = \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \frac{\partial}{\partial x_k} + b_k \frac{\partial}{\partial y_k} \right)$$

avec $a_k,\, b_k \in \mathscr{C}^\infty(V, \mathbb{R})$. Le champ de vecteur X est réel holomorphe si et seulement si les fonctions $a_k + ib_k$ sont holomorphes. En effet

$$\frac{1}{2}(X - iJX) = \sum_{k=1}^{n} (a_k + ib_k) \frac{\partial}{\partial z_k} \ .$$

2.4.3 Automorphismes infinitésimaux

Soit M une variété différentielle et J une structure presque-complexe sur M.

Définition 2.44. Un *automorphisme infinitésimal* pour la structure presque-complexe J sur M est un champ de vecteurs X qui vérifie $\mathscr{L}_X J = 0$ où $\mathscr{L}_X$ est la dérivée de Lie associé à X.

Définition 2.45. On définit le *tenseur de Nijenhuis* N_J de J sur M par

$$N_J(X, Y) = [X, Y] + J([X, JY] + [JX, Y]) - [JX, JY]$$

où X et Y sont des champs de vecteurs de M.

Cas des variétés différentielles

Soit M une variété différentielle munie d'une structure presque-complexe J.

Proposition 2.46. *Un champ de vecteurs X sur M est un automorphisme infinitésimal pour la structure presque-complexe J si et seulement si, pour tout champ de vecteurs Y de M, nous avons*

$$[X, JY] = J([X, Y]) \ .$$

Démonstration. Soit X et Y deux champs de vecteurs sur M. Nous avons

$$[X, JY] = \mathscr{L}_X(JY) = (\mathscr{L}_X J)Y + J(\mathscr{L}_X Y) = (\mathscr{L}_X J)Y + J([X, Y]) \ ;$$

donc $\mathscr{L}_X J = 0$ si et seulement si pour tout champ de vecteurs Y sur M nous avons $[X, JY] = J([X, Y])$. □

Corollaire 2.47. Si X est un automorphisme infinitésimal, alors JX est un automorphisme infinitésimal si et seulement si $N_J(X, Y) = 0$ pour tout champ de vecteurs Y.

Corollaire 2.48. Si X et Y sont deux automorphismes infinitésimaux pour J sur M alors

$$[JX, JY] = -[X, Y] \ .$$

Cas des variétés complexes

Soit V une variété complexe et J la structure complexe fournie par V.

Proposition 2.49. *Soit $X \in T^{\mathbb{R}}V$ un champ de vecteurs. Le champ de vecteurs X est un automorphisme infinitésimal pour J si et seulement si le champ de vecteurs $X - iJX$ est holomorphe.*

Démonstration. Soit X et Y deux champs de vecteurs appartenant à $T^{\mathbb{R}}V$. Soit $(z_1, \ldots, z_n)$ les coordonnées complexes de V dans une carte holomorphe où $z_j = x_j + i\, y_j$ avec $x_j,\, y_j \in \mathbb{R}$ et $(x_1,\, y_1, \ldots, x_n,\, y_n)$ les coordonnées réel de associés. On peut écrire

$$X = \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \frac{\partial}{\partial x_k} + b_k \frac{\partial}{\partial y_k} \right) \quad \text{et} \quad Y = \sum_{k=1}^{n} \left(f_k \frac{\partial}{\partial x_k} + g_k \frac{\partial}{\partial y_k} \right) \ .$$

Pour alléger les calculs, on pose $X_k = a \dfrac{\partial}{\partial x_k} + b \dfrac{\partial}{\partial y_k}$ et $Y_j = f \dfrac{\partial}{\partial x_j} + g \dfrac{\partial}{\partial y_j}$. On suppose que X_k est un automorphisme infinitésimal. On a :

$$\begin{aligned} J([X_k,\, Y_j]) &= \left(a \frac{\partial f}{\partial x_k} + b \frac{\partial f}{\partial y_k} \right) \frac{\partial}{\partial y_j} - \left(f \frac{\partial a}{\partial x_j} + g \frac{\partial a}{\partial y_j} \right) \frac{\partial}{\partial y_k} \\ &\quad - \left(b \frac{\partial g}{\partial y_k} + a \frac{\partial g}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} + \left(g \frac{\partial b}{\partial y_j} + f \frac{\partial b}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \quad \text{et} \\ [X_k,\, JY_j] &= \left(a \frac{\partial f}{\partial x_k} + b \frac{\partial f}{\partial y_k} \right) \frac{\partial}{\partial y_j} - \left(f \frac{\partial b}{\partial y_j} - g \frac{\partial b}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial y_k} \\ &\quad - \left(b \frac{\partial g}{\partial y_k} + a \frac{\partial g}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} + \left(g \frac{\partial a}{\partial x_j} - f \frac{\partial a}{\partial y_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \ . \end{aligned}$$

Donc l'égalité $[X_k,\, JY_j] = J([X_k,\, Y_j])$ équivaut à

$$f \cdot \left(\frac{\partial a}{\partial x_j} - \frac{\partial b}{\partial y_j} \right) + g \cdot \left(\frac{\partial a}{\partial y_j} + \frac{\partial b}{\partial x_j} \right) = 0 \quad \text{et} \quad g \cdot \left(\frac{\partial a}{\partial x_j} - \frac{\partial b}{\partial y_j} \right) + f \cdot \left(\frac{\partial a}{\partial y_j} + \frac{\partial b}{\partial x_j} \right) = 0 \ ;$$

lorsqu'on somme ces deux égalité en multipliant la seconde par $-i$ on obtient

$$(f - ig)\, \frac{\partial (a + ib)}{\partial \overline{z_j}} = 0 \ .$$

Comme cette dernière égalité est vraie pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ et pour toute fonction $f - ig$ avec $f,\, g \in \mathscr{C}^{\infty}(V,\, \mathbb{R})$, on conclut que pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\dfrac{\partial (a + ib)}{\partial \overline{z_j}} = 0$; donc la fonction $a + ib$ est holomorphe. Donc $X_k - iJX_k$ est un champ de vecteurs holomorphe. Inversement si $X_k - iJX_k$ est holomorphe, en utilisant les équations de Cauchy-Riemann, on a $[X_k,\, JY_j] = J([X_k,\, Y_j])$. □

Corollaire 2.50. Si $X \in T^{\mathbb{R}}V$ est un automorphisme infinitésimal alors JX l'est aussi. La réciproque est également vraie.

3

Intégrabilité des structures presque complexes

Le but principal de ce chapitre est de présenter le théorème de Newlander - Nirenberg. Ce théorème donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une structure presque-complexe sur une variété différentielle soit intégrable. Avant de présenter ce théorème, nous présenterons dans une première partie la version analytique du théorème de Frobenius puis nous étudierons les propriétés locales des structures presque-complexe à travers des résultats sur les opérateurs elliptiques.

3.1 Version analytique du théorème de Frobenius

Nous commençons cette partie par définir les conditions d'intégrabilité d'une structure presque-complexe. Lorsqu'une de ces condition est vérifiée, nous montrerons dans les théorèmes **3.16** et **3.17** que la structure presque-complexe est intégrable. Dans un deuxième temps, on étudie les propriétés des crochets de champs de vecteurs sur les distributions complexes et holomorphes. On termine cette partie avec la démonstration de la version analytique du théorème de Frobenius.

3.1.1 Condition d'intégrabilité d'une structure complexe

Définition 3.1. Soit M une variété différentielle de dimension paire munie d'une structure presque-complexe J. On dit que J est *intégrable* s'il existe une structure de variété complexe sur M qui induit J.

Soit M une variété différentielle de dimension $2n$ munie d'une structure presque complexe J. On rappelle que le *tenseur de Nijenhuis* N_J de J sur M est défini par

$$N_J(X,\,Y) = [X,\,Y] + J([X,\,JY] + [JX,\,Y]) - [JX,\,JY]$$

où X et Y sont des champs de vecteurs de M.

Proposition 3.2. *On étend le crochet de Lie par $\mathbb{C}$-linéarité à $T^{\mathbb{C}}M$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le crochet de deux champs de vecteurs de type $(1,\,0)$ pour J est de type $(1,\,0)$ pour J.*
2. *Le crochet de deux champs de vecteurs de type $(0,\,1)$ pour J est de type $(0,\,1)$ pour J.*
3. *L'opérateur N_J est identiquement nul.*

La condition $N_J = 0$ est appelée condition d'intégrabilité de la structure presque-complexe J.

Démonstration. L'équivalence entre les conditions 1 et 2 vient du fait que pour tous champs de vecteurs $X,\,Y \in \Gamma(T^{\mathbb{C}}M)$, le conjugué complexe de $[X,\,Y]$ est $[\overline{X},\,\overline{Y}]$. Soit $X,\,Y \in \Gamma(TM)$, on a

$$[X + iJX,\,Y + iJY] = [X,\,Y] - [JX, JY] + i([JX,\,Y] + [X,\,JY]) \ . \tag{3.1}$$

Montrons l'équivalence entre les conditions 2 et 3.
Si $N_J(X,\, Y) = 0$, alors $[JX,\, JY] = [X,\, Y] + J([X,\, JY] + [JX,\, Y])$; en remplaçant dans **(3.1)**, nous avons

$$[X + iJX,\, Y + iJY] = i(\,[X,\, JY] + [JX,\, Y] + iJ([X,\, JY] + [JX,\, Y])\,)\ \ ,$$

c'est-à-dire $[T^{0,1}M,\, T^{0,1}M] \subset T^{0,1}M$.
Si pour tout $X,\, Y$ dans $\Gamma(TM)$ nous avons $[X + iJX,\, Y + iJY] = Z + iJZ$ avec Z dans $\Gamma(TM)$, alors $Z = [X,\, Y] - [JX, JY]$ et $JZ = J([X,\, Y] - [JX, JY])$. À travers l'égalité **(3.1)**, nous avons $JZ = [JX,\, Y] + [X, JY]$, donc

$$[JX,\, JY] - [X,\, Y] = J([X,\, JY] + [JX,\, Y])\ \ .$$

Ainsi, l'opérateur N_J est identiquement nulle. □

3.1.2 Distribution réelle associée à une distribution complexe

Soit $n,\, p$ deux entiers tels que $p \leq n$. Soit M une variété différentielle de dimension $2n$ munie d'une structure presque-complexe J.

Définition 3.3. Une *distribution complexe* E de dimension complexe p est un sous-fibré vectoriel complexe de rang p du fibré vectoriel complexe $T^{1,0}M$.

Soit $E \subset T^{1,0}M$ une distribution. On appelle $\mathrm{Re}\, E$ la distribution de TM définie par $\mathrm{Re}\, E = \pi_{1,0}^{-1}(E)$ où

$$\begin{array}{rccc} \pi_{1,0} : & TM & \longrightarrow & T^{1,0}M \\ & \xi & \longmapsto & \dfrac{1}{2}(\xi - iJ\xi) \end{array}$$

est un isomorphisme. La distribution $\mathrm{Re}\, E$ est stable par J.

Exemple 3.4. Soit V une variété complexe de dimension n. Soit $(z_1, \ldots,\, z_n)$ les coordonnées complexes de V dans une carte holomorphe où $z_j = x_j + iy_j$ avec $x_j,\, y_j \in \mathbb{R}$. Si $Z = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + ib_k)\frac{\partial}{\partial z_k}$ est une section de $T^{1,0}V$ avec $a_k,\, b_k \in \mathscr{C}^\infty(V,\, \mathbb{R})$, alors

$$\mathrm{Re}\, Z = \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \frac{\partial}{\partial x_k} + b_k \frac{\partial}{\partial y_k} \right)\ \ .$$

Lemme 3.5. *Soit E une distribution complexe sur M. La condition $[E,\, E] \subset E$ est équivalente la condition suivante : pour tout $X,\, Y \in \mathrm{Re}\, E$,*

$$N_J(X,\, Y) = 0 \quad \textit{et} \quad [X,\, Y] - [JX,\, JY] \in \mathrm{Re}\, E\ \ . \tag{3.2}$$

Démonstration. Par la proposition 3.2, la condition $[E,\, E] \subset E$ est équivalente à $N_J = 0$. Pour tout $X,\, Y \in \mathrm{Re}\, E$, on a

$$[X - iJX,\, Y - iJY] = ([X,\, Y] - [JX,\, JY]) - i\,([X,\, JY] + [JX,\, Y])\ \ .$$

Comme $N_J = 0$, on a

$$[X - iJX,\, Y - iJY] = ([X,\, Y] - [JX,\, JY]) - iJ\,([X,\, Y] - [JX,\, JY])\ \ ;$$

d'où l'équivalence. □

3.1.3 Distribution holomorphe

Soit V une variété complexe de dimension complexe n et p un entier tel que $p \leq n$. On note J la structure complexe induite par V.

Définition 3.6. Une *distribution holomorphe* E de rang p sur V est un sous-fibré vectoriel holomorphe de rang p du fibré $T^{1,0}V$.

Cette définition a bien un sens car nous avons montré dans la proposition **2.39** que le fibré $T^{1,0}V$ est isomorphe au fibré tangent holomorphe TV.

Définition 3.7. Une distribution holomorphe E de rang p sur V est dite *intégrable* au sens holomorphe si V est recouvert par des ouverts U tels qu'il existe une application $\psi = \psi_U : U \longrightarrow \mathbb{C}^{n-p}$ holomorphe et submersive satisfaisant pour tout $z \in U$

$$E_z = \mathrm{Ker}(\, T_z\psi : T_zU \longrightarrow T_{\psi(z)}\mathbb{C}^{n-p}\,) \ .$$

Lemme 3.8. *Soit $E \subset T^{1,0}V$ une distribution holomorphe de rang p. La condition $[E,\, E] \subset E$ est équivalente à $[\mathrm{Re}\, E,\, \mathrm{Re}\, E] \subset \mathrm{Re}\, E$.*

Démonstration. On suppose $[E,\, E] \subset E$. Soit $X,\, Y \in \mathrm{Re}\, E$, par le lemme **3.5**, on a $[X,\, Y] - [JX,\, JY] \in \mathrm{Re}\, E$. Comme E est holomorphe, par le corollaire **2.48** et la proposition **2.49**, on conclut que $[X,\, Y] \in \mathrm{Re}\, E$.
On suppose que $[\mathrm{Re}\, E,\, \mathrm{Re}\, E] \subset \mathrm{Re}\, E$. Comme E est holomorphe, par la proposition **2.49** et le corollaire **2.48**, on a $[JX,\, JY] = -[X,\, Y]$ pour tout $X,\, Y \in \mathrm{Re}\, E$; donc $[X,\, Y] - [JX,\, JY] \in \mathrm{Re}\, E$. On conclut avec le lemme **3.5**. □

3.1.4 Version analytique du théorème de Frobenius

Lemme 3.9. *Soit V une variété complexe et J la structure complexe induite par V. Soit X un champ de vecteurs réel holomorphe sur V et Φ^X son flot. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons $\left(\Phi_t^X\right)^* J = J$.*

Démonstration. Comme $\dfrac{d}{dt}\left[\left(\Phi_t^X\right)^* J\right] = \left(\Phi_t^X\right)^* (\mathscr{L}_X J)$ et que $\mathscr{L}_X J = 0$, on conclut que pour tout t, $\left(\Phi_t^X\right)^* J = \left(\Phi_0^X\right)^* J = J$. □

Corollaire 3.10. Si X est un champ de vecteurs réel holomorphe de flot Φ^X, alors pour tout t, nous avons $J \circ \left(\Phi_t^X\right)^* = \left(\Phi_t^X\right)^* \circ J$.

Démonstration. Comme $\left(\Phi_t^X\right)^* \circ J = J$, on a $-\left(\Phi_t^X\right)^* = \left[\left(\Phi_t^X\right)^* \circ J\right] \circ J = J \circ J = J \circ \left[\left(\Phi_t^X\right)^* \circ J\right]$, c'est-à-dire $J \circ \left(\Phi_t^X\right)^* = \left(\Phi_t^X\right)^* \circ J$. □

Théorème 3.11 (Frobenius holomorphe).

Soit V est une variété complexe de dimension n et J la structure complexe induite par V. Une distribution holomorphe E de rang p sur V est intégrable au sens holomorphe si et seulement si on a $[E,\, E] \subset E$.

Démonstration. On suppose que E est intégrable. Soit U un ouvert de V et $\psi = \psi_U : U \longrightarrow \mathbb{C}^{n-p}$ une application holomorphe submersive tel que $E_z = \mathrm{Ker}(\, T_z\psi : T_zU \longrightarrow T_{\psi(z)}\mathbb{C}^{n-p}\,)$ pour tout $z \in U$. L'espace $W = \psi^{-1}(0)$ est une sous-variété de V de dimension p. Pour tout $z \in W$, on a $T_zW = E_z$.
Soit $X,\, Y$ deux champs de vecteurs de V se trouvant dans E. Les champs de vecteurs $X_{|W}$ et $Y_{|W}$ sont dans TW. Par la proposition **1.40**, $[X,\, Y]_{|W}$ est dans TW, donc pour tout $z \in W$, $[X,\, Y](z) \in E_z$. Ainsi on a $[E,\, E] \subset E$.

On suppose que $[E, E] \subset E$. Dans cette partie, on complexifie la démonstration du lemme **1.58**.
Soit $x \in V$ et U un ouvert de V contenant x. Les hypothèses étant locales, on peut supposer que U est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ de coordonnées holomorphes $(z_1, \ldots, z_n)$ où $z_j = x_j + iy_j$ avec $x_j, y_j \in \mathbb{R}$. On suppose que $x = 0$.

Première étape. Le but de cette étape est de construire une famille de champs de vecteurs X_j, $Y_j = JX_j$ pour $j \in \{1, \ldots, p\}$ engendrant $\mathrm{Re}\, E$ sur U tels que $X_j + iY_j$ est holomorphe.

Soit $(e_1, Je_1, \ldots, e_n, Je_n)$ une base de $T^{\mathbb{R}}V$ tel que sur U, $\mathrm{Re}\, E = \mathrm{vect}(e_1, Je_1, \ldots, e_p, Je_p)$. Quitte à composer par un $\mathbb{C}$-isomorphisme de $\mathbb{C}^n$, on peut supposer qu'en 0, $e_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ et $Je_j = \dfrac{\partial}{\partial y_j}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$. Au voisinage de 0, on peut écrire

$$e_j = \sum_{k=1}^{n} \left(a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k} + b_{jk} \frac{\partial}{\partial y_k} \right)$$

où pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$ et $k \in \{1, \ldots, n\}$, les fonctions $\alpha_{jk} = a_{jk} + ib_{jk}$ sont holomorphes. La matrice $A = (\alpha_{jk})_{1 \leq j, k \leq p}$ est holomorphe et vérifie $A(0) = I_p$. On note $B = (\beta_{jk})_{1 \leq j, k \leq p}$ l'inverse de A dans un voisinage de 0.
Pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, on définit les champs de vecteurs $e_j^{1,0}$ de $T^{1,0}M$ par $e_j^{1,0} = \dfrac{1}{2}(e_j - iJe_j)$. Nous avons,

$$e_j^{1,0} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} \frac{\partial}{\partial z_k} \quad .$$

Soit $(v_j)_{1 \leq j \leq p}$ une famille de champs de vecteurs sur $T^{1,0}M$ définie par $v_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \beta_{jk}\, e_k^{1,0}$. Comme les champs de vecteurs $e_j^{1,0}$, les champs de vecteurs v_j forment une base de E sur U. On a :

$$v_j = \frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{l=p+1}^{n} f_{jl} \frac{\partial}{\partial z_l} \quad \text{où} \quad f_{jl} = \sum_{k=1}^{p} \beta_{jk}\, \alpha_{kl} \quad .$$

On pose $X_j = 2\, \mathrm{Re}\, v_j$ et $Y_j = -2\, \mathrm{Im}\, v_j$, nous avons :

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{l=p+1}^{n} \left(\mathrm{Re}(f_{jl}) \frac{\partial}{\partial x_l} + \mathrm{Im}(f_{jl}) \frac{\partial}{\partial y_l} \right) \text{ et } Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{l=p+1}^{n} \left(\mathrm{Re}(f_{jl}) \frac{\partial}{\partial y_l} - \mathrm{Im}(f_{jl}) \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \ ;$$

on a bien $Y_j = JX_j$.

Deuxième étape. Montrons que pour tout $j, l \in \{1, \ldots, p\}$ on a $[X_j, X_l] = 0$, $[Y_j, Y_l] = 0$ et $[X_j, Y_l] = 0$.
Soit $(u_1, \ldots, u_{2n})$ les coordonnées de $\mathbb{R}^{2n}$ tel que $u_{2j-1} = x_j$ et $u_{2j} = y_j$ pour $j \in \{1, \ldots, n\}$. Par construction, il existe des fonctions (g_{jl}) et (h_{jl}) telles que

$$X_j = \frac{\partial}{\partial u_{2j-1}} + \sum_{l=2p+1}^{2n} g_{jl} \frac{\partial}{\partial u_j} \quad \text{et} \quad Y_j = \frac{\partial}{\partial u_{2j}} + \sum_{l=2p+1}^{2n} h_{jl} \frac{\partial}{\partial u_j} \quad .$$

Comme $[X_j, X_l]$, $[Y_j, Y_l]$, $[X_j, Y_l] \in \mathrm{Re}\, E$, par l'argument utilisé dans la démonstration du lemme **1.58** on conclut que $[X_j, X_l] = 0$, $[Y_j, Y_l] = 0$ et $[X_j, Y_l] = 0$.

Troisième étape. Montrons qu'il existe une application holomorphe Φ tel que $\Phi^* X_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ et $\Phi^* Y_j = \dfrac{\partial}{\partial y_j}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$.

Soit Φ^j (resp. Ψ^j) le flot engendré par X_j (resp. Y_j) pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$. Soient $W = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_1 = \ldots = z_p = 0\}$ une sous-variété transverse à Re E en 0 et Φ l'application définit au voisinage de 0 par

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{C}^p \times W & \longrightarrow & M \\ & ((x_1 + iy_1, \ldots, x_p + iy_p), w) & \longmapsto & \Phi^1_{x_1} \circ \Psi^1_{y_1} \circ \ldots \circ \Phi^p_{x_p} \circ \Psi^p_{y_p}(w) \end{array} .$$

En identifiant $\mathbb{C}^p$ à $\mathbb{R}^{2p}$ et en voyant W et M comme des variétés réelles, nous avons :

$$T_{(0,w)}\Phi(\xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_p, \eta_p, v) = \xi_1 X_1(w) + \eta_1 Y_1(w) + \ldots + \xi_p X_p(w) + \eta_p Y_p(w) + v \ .$$

L'application $T_{(0,w)}\Phi : \mathbb{C}^p \times T_w W \longrightarrow T_w M$ est un isomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire, donc Φ est un difféomorphisme local au voisinage de 0.
On note $J_W = J_{|W}$ la structure presque complexe sur W et $J_{\mathbb{R}^{2p}} = J_{|\mathbb{R}^{2p}}$ la structure presque complexe sur $\mathbb{R}^{2p}$. Étant donné que les flots Φ^j et Ψ^k commutent, comme dans le cas réel (voir la démonstration du lemme **1.58**) on a

$$\Phi^* X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{et} \quad \Phi^*(JX_j) = \Phi^* Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} = J_{\mathbb{R}^{2p}}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = J_{\mathbb{R}^{2p}}(\Phi^* X_j)$$

dans un voisinage de 0. D'autre part, pour Z un champ de vecteurs sur W, $z' = (x_1 + iy_1, \ldots, x_p + iy_p)$ et $w \in W$ nous avons :

$$T_{(z',w)}\Phi(Z(w)) = \left(\Phi^1_{x_1}\right)^* \circ \left(\Psi^1_{y_1}\right)^* \circ \ldots \circ \left(\Phi^1_{x_p}\right)^* \circ \left(\Psi^1_{y_p}\right)^* Z(\Phi(z', w)) \ .$$

Par le corollaire **3.10**, nous avons

$$\begin{aligned} T_{(z',w)}\Phi(JZ(w)) &= \left(\Phi^1_{x_1}\right)^* \circ \left(\Psi^1_{y_1}\right)^* \circ \ldots \circ \left(\Phi^1_{x_p}\right)^* \circ \left(\Psi^1_{y_p}\right)^* JZ(\Phi(z', w)) \\ &= J(T_{((z',w)}\Phi(Z(w)) \ ; \end{aligned}$$

donc par la proposition **2.5**, l'application $T_{(z',w)}\Phi$ est $\mathbb{C}$-linéaire au voisinage de 0. Ainsi l'application Φ est holomorphe, donc E est intégrable. □

3.2 Propriétés locales des structures presque-complexes

Soit M une variété différentielle de dimension $2n$ munie d'une structure presque-complexe J qui vérifie la condition $N_J = 0$. Le but de cette partie est de montrer que localement il existe une nouvelle base de coordonnées telle que la structure presque-complexe J est donné par la structure complexe de $\mathbb{C}^n$; c'est l'objectif du théorème **3.16**.

3.2.1 Deux énoncés sur les opérateurs elliptiques

Dans cette sous-partie, on présente deux théorèmes sur les opérateurs elliptiques que nous admettons. Ces théorèmes seront utiles pour la démonstration du théorème **3.16**.

Soit n un entier positif et $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^n$. Pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice, on note $\dfrac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$ l'élément $\dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \dfrac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$. L'élément $\dfrac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$ est un opérateur différentiel d'ordre $|\alpha| = \displaystyle\sum_{j=1}^n \alpha_j$. Plus généralement, un *opérateur différentiel linéaire* est un polynôme en les $\dfrac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$ qui s'écrit sous la forme

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$$

où les a_α sont des fonctions de x à valeurs réelles ou complexes et m un entier naturel.
On dit que l'opérateur P est d'ordre m sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ s'il existe une fonction a_α qui ne s'annule pas sur Ω avec $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| = m$.

Définition 3.12. L'opérateur différentiel P d'ordre m est *elliptique* sur Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ si pour tout x dans Ω et tout ξ dans $\mathbb{R}^n$ non nul, nous avons

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha \neq 0 \ .$$

Exemple 3.13. L'opérateur laplacien sur $\mathbb{R}^n$ est elliptique.

Soit m, N et M trois entiers positifs tels que $M \geq N$. Soit $u = (u_1, \dots, u_N) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction inconnue. Soit M équations d'ordre m définies par

$$F_j(x,\, u,\, Du,\, \dots\, ,\, D^m u) = 0 \ \text{ pour } \ j \in \{1, \dots, M\} \ , \tag{3.3}$$

où $D^p u$ est la collection de toutes les dérivées partielles de u d'ordre p et $(F_j)_j$ une famille de fonctions que l'on suppose être lisses en leurs arguments.
Pour $r \in \{1, \dots, N\}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq m$, on pose $y_{r\alpha} = \dfrac{\partial^\alpha u_r}{\partial x^\alpha}(x)$. On note $(x,\, (y_{r\alpha})_{r,\,\alpha})$ les variables de la fonction F_j. Par la formule de Taylor à l'ordre 1, nous avons

$$F_j(x,\, (y_{r\alpha} + h_{r\alpha})_{r,\,\alpha}) = F_j(x) + \sum_{r=1}^{N} \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{\partial F_j}{\partial y_{r\alpha}}(x,\, (y_{r\alpha})_{r,\,\alpha})\, h_{r\alpha} + \text{Reste} \ .$$

Soit $w : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction. On pose $h_{r\alpha} = \dfrac{\partial^\alpha w_r}{\partial x^\alpha}$ et l'on définit le linéarisé L_j de F_j en u par

$$L_j w = \sum_{r=1}^{N} \sum_{|\alpha| \leq m} \underbrace{\frac{\partial F_j}{\partial y_{r\alpha}}(x,\, u(x),\, \dots,\, D^m u(x))}_{a_{jr\alpha}} \ \frac{\partial^\alpha w_r}{\partial x^\alpha} \ . \tag{3.4}$$

On dit les opérateurs F_j sont elliptiques en la fonction u si les opérateurs différentiels L_j définie en **(3.4)** sont elliptiques. On dit que le système d'équation **(3.4)** pour $j \in \{1, \dots, M\}$ est elliptique si pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et tout x, la matrice $\left(a_{jr} = \displaystyle\sum_{|\alpha|=m} a_{jr\alpha} \xi^\alpha \right)_{\substack{1 \leq j \leq M \\ 1 \leq r \leq N}}$ est de rang N.

Voici maintenant les énoncés des deux théorèmes annoncés.

Théorème 3.14 (Analyticité des solutions des systèmes elliptiques). *Soit u une solution de classe $\mathscr{C}^m$ du système* **(3.3)** *qui est supposé elliptique en u. Si les fonctions F_j sont analytiques en leurs arguments, alors la fonction u est analytique.*

Théorème 3.15 (Existence locale des solutions). *On suppose que $M = N$ et que le système* **(3.3)** *est elliptique en une fonction u_0. On suppose qu'en un point x_0 la fonction u_0 vérifie les équations*

$$F_j(x_0,\, u_0(x_0), \dots,\, D^m u_0(x_0)) = 0 \ \textit{ pour } \ j \in \{1, \dots, M\} \ ,$$

avec F_j lisse. Alors pour $|x - x_0| \leq \varepsilon$ avec ε suffisamment petit, il existe une solution u du système **(3.3)** *avec*

$$\left| \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}(x) - \frac{\partial^\alpha u_0}{\partial x^\alpha}(x) \right| \leq C\, \varepsilon^{m - |\alpha| + \sigma} \quad \textit{pour } \ |\alpha| \leq m$$

où C et $\sigma < 1$ sont deux constantes positives.

3.2.2 Propriétés locales des structures presque-complexes

Nous présentons maintenant le théorème principal de cette partie.

Théorème 3.16.

Soit $x_0 \in M$ et U un voisinage de x_0. Soient $(x_1, \dots, x_{2n})$ les coordonnées canoniques réelles de U et n champs de vecteurs $P_1, \dots, P_n$ (dans la base formé des x_j) qui engendrent le fibré vectoriel complexe $T^{0,1}M$ sur U.
Sous l'hypothèse $N_J = 0$, il existe une base $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ de $\mathbb{C}^n$ telle que la famille d'équations $P_j w = 0$ pour $j \in \{1, \dots, n\}$ soient équivalentes à la famille d'équations $\dfrac{\partial w}{\partial \overline{\zeta_j}} = 0$ pour $j \in \{1, \dots, n\}$.

Démonstration du théorème 3.16. Les hypothèses étant locales, on peut supposer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$ et $x_0 = 0$. On note $(z_1, \dots, z_n)$ les coordonnées complexes de U définies par $z_j = x_j + ix_{j+n}$ pour $j \in \{1, \dots, n\}$.
Comme $N_J = 0$, par la proposition **3.2** nous avons $[T^{0,1}M,\, T^{0,1}M] \subset T^{0,1}M$. Donc pour tout $j, k \in \{1, \dots, n\}$,

$$[P_j,\, P_k] \text{ est une combinaison linéaire des } P_1, \dots, P_n \ . \tag{3.5}$$

Quitte à composer par un $\mathbb{R}$-isomorphisme de $\mathbb{C}^n$, on peut supposer qu'à l'origine $P_j = \dfrac{\partial}{\partial \overline{z_j}}$. On peut écrire sur U

$$P_j = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{jk} \frac{\partial}{\partial z_k} + \sum_{k=0}^{n} \beta_{jk} \frac{\partial}{\partial \overline{z_k}}$$

où les α_{jk} et les β_{jk} sont des fonctions de classes $\mathscr{C}^\infty$. On note C la matrice $(\alpha_{jk})_{1 \le j,\, k \le n}$ et D la matrice $(\beta_{jk})_{1 \le j,\, k \le n}$. En 0, la matrice D vaut l'identité et la matrice C est nulle. Donc, proche de 0, la matrice D est inversible. Soit $Q_1, \dots, Q_n$ les opérateurs définies par

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix} = D^{-1} \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} = D^{-1} C \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial z_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \overline{z_1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \overline{z_n}} \end{pmatrix} \ . \tag{3.6}$$

Les opérateurs $Q_1, \dots, Q_n$ forment une base du fibré vectoriel complexe $T^{0,1}M$ sur U. Il existe des fonctions a_{jk} de classe $\mathscr{C}^\infty$ telles que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$Q_j = \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} - \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \frac{\partial}{\partial z_k} \ .$$

Les fonctions a_{jk} sont nulles en 0.
Compte tenue de l'hypothèse $N_J = 0$, nous avons : pour tout $j, k \in \{1, \dots, n\}$,

$$[Q_j,\, Q_k] \text{ est une combinaison linéaire des } Q_1, \dots, Q_n \ ; \tag{3.7}$$

on peut aussi le voir en utilisant la définition **(3.6)** et la condition **(3.5)**. On note A la matrice $(a_{jk})_{1 \le j,\, k \le n}$. Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on note A_j la j-ème ligne de la matrice A.

Pour $z = (z_1, \dots, z_n)$, on note

$$\frac{\partial}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial z_n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \overline{z_1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \overline{z_n}} \end{pmatrix} \ .$$

Formellement, nous avons $Q_j = \dfrac{\partial}{\partial \overline{z_j}} - A_j \cdot \dfrac{\partial}{\partial z}$, donc pour tout $j,\, k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned}
[Q_j,\, Q_k] &= -\left[\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}},\, A_k \cdot \frac{\partial}{\partial z}\right] - \left[A_j \cdot \frac{\partial}{\partial z},\, \frac{\partial}{\partial \overline{z_k}}\right] + \left[A_j \cdot \frac{\partial}{\partial z},\, A_k \cdot \frac{\partial}{\partial z}\right] \\
&= -\frac{\partial A_k}{\partial \overline{z_j}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial A_j}{\partial \overline{z_k}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} + \left(A_j \cdot \frac{\partial A_k}{\partial z}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial z} - \left(A_k \cdot \frac{\partial A_j}{\partial z}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \quad .
\end{aligned}$$

Comme le crochet $[Q_j,\, Q_k]$ vérifie la condition **(3.7)** et qu'il ne contient pas l'élément $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$, alors nous avons nécessairement $[Q_j,\, Q_k] = 0$. Ainsi,

$$\frac{\partial A_k}{\partial \overline{z_j}} - A_j \cdot \frac{\partial A_k}{\partial z} = \frac{\partial A_j}{\partial \overline{z_k}} - A_k \cdot \frac{\partial A_j}{\partial z}$$

c'est-à-dire $Q_j A_k = Q_k A_j$.

Condition sur la base $(\zeta_1,\, \ldots,\, \zeta_n)$ cherchée. On note ζ le vecteur ligne $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ constitué d'éléments formant la base cherchée.
Soit w une fonction définie sur $\mathbb{C}^n$ et vérifiant les équations $Q_j w = 0$ pour tout $j \in \{1,\, \ldots,\, n\}$. On a

$$Q_j\left[w(\zeta(z))\right] = Q_j\zeta(z) \cdot \frac{\partial w}{\partial \zeta}(\zeta(z)) + Q_j\overline{\zeta}(z) \cdot \frac{\partial w}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta(z)) \quad .$$

On suppose que ζ est dans un voisinage de la fonction $z \longmapsto z$. Soit $U_0 \subset U$ un voisinage de 0 tel que pour tout $z \in U_0$, $\zeta(z) \in U$. Pour toutes fonctions w telle que $Q_j w = 0$, la fonction $z \longmapsto Q_j\left[w(\zeta(z))\right]$ appartient à un voisinage de la fonction nulle sur U_0. Comme dans la base $(\zeta_1,\, \ldots,\, \zeta_n)$ nous avons pour tout $j \in \{1,\, \ldots,\, n\}$, $\dfrac{\partial w}{\partial \overline{\zeta_j}} = 0$, on conclut que pour tout j, $Q_j\zeta$ est dans un voisinage de la fonction nulle sur U_0.
Comme la fonction ζ que l'on cherche n'est pas unique, on peut supposer que $Q_j\zeta$ est la fonction nulle sur U_0.

Recherche de la fonction ζ. On va chercher ζ dans un voisinage de la fonction $z \longmapsto z$ tel que les coordonnées $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ soient des solutions indépendantes des équations $Q_j\zeta = 0$.
Au voisinage de 0, nous avons $\dfrac{\partial \zeta}{\partial \overline{z_j}} = A_j \cdot \dfrac{\partial \zeta}{\partial z}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$; donc

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \overline{z}} = A \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial z} \quad . \tag{3.8}$$

Comme A n'est pas analytique, la solution ζ de **(3.8)** n'est pas nécessairement analytique. On veut construire ζ comme étant une fonction analytique de $(x_1,\, \ldots,\, x_{2n})$; pour cette raison, nous allons chercher ζ sous la forme $\zeta = g \circ h$ où g et h sont des fonctions de $\mathbb{C}^n$ à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ telles que

$$h(0) = 0 \quad , \quad g(0) = 0 \quad , \quad \left.\frac{\partial h}{\partial z}\right|_{z=0} = \mathrm{Id} \quad \text{et} \quad \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{y=0} = \mathrm{Id}$$

pour $y = h(z)$. En faisant un abus de notation, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \zeta}{\partial z} &= \frac{\partial h}{\partial z} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial y} \circ h\right) + \frac{\partial \overline{h}}{\partial z} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial \overline{y}} \circ h\right) \quad , \\
\frac{\partial \zeta}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial h}{\partial \overline{z}} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial y} \circ h\right) + \frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{z}} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial \overline{y}} \circ h\right) \quad .
\end{aligned}$$

Au voisinage de 0, la matrice $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ est inversible. On pose $B = \left(\dfrac{\partial g}{\partial \overline{y}}\right) \cdot \left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)^{-1}$ et l'on note $(b_{jk})_{1\leq j,\, k\leq n}$ les coefficient de B et B_j la j-ème ligne de B. Ainsi, l'équation **(3.8)** devient

$$\frac{\partial h}{\partial \overline{z}} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial y} \circ h\right) + \frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{z}} \cdot (B \circ h) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial y} \circ h\right) = A \cdot \left[\frac{\partial h}{\partial z} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial y} \circ h\right) + \frac{\partial \overline{h}}{\partial z} \cdot (B \circ h) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial y} \circ h\right)\right] \ ,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial h}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{z}} \cdot (B \circ h) = A \cdot \left[\frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial \overline{h}}{\partial z} \cdot (B \circ h)\right] \ .$$

Comme au voisinage de 0 la matrice $\dfrac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{z}} - A \cdot \dfrac{\partial \overline{h}}{\partial z}$ est dans un voisinage de l'identité, elle est donc inversible. On a :

$$B \circ h = \left(\frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{z}} - A \cdot \frac{\partial \overline{h}}{\partial z}\right)^{-1} \cdot \left(A \cdot \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial \overline{z}}\right) \ . \tag{3.9}$$

Si l'on choisi h assez voisin de l'identité dans $\mathscr{C}^1$, on pourra définir $B \circ h$ et donc B par l'équation **(3.9)**. Ainsi, pour trouver la fonction g, il faudra résoudre l'équation

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{y}} = B \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \ , \tag{3.10}$$

c'est-à-dire l'équation **(3.8)** avec A remplacé par B.

On a le choix de h mais on aimerait que les fonction b_{jk} vu comme des fonctions de h soient analytiques. Pour cela, on va montrer que l'on peut choisir h de tel sorte que $B(0)$ soit aussi voisin de 0 et qu'on ait

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial B_j}{\partial y_j} = 0 \tag{3.11}$$

au voisinage de l'origine.

Construction de la fonction h. Si h est suffisamment proche de la fonction $z \longmapsto z$, la matrice $B(0)$ est proche de la matrice nulle. Donc, nous allons chercher h dans un voisinage de la fonction $z \longmapsto z$. De la condition **(3.11)**, nous avons

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial B_j}{\partial y_j} \circ h = 0 \tag{3.12}$$

au voisinage de 0. Au lieu de voir **(3.12)** comme une équation aux dérivées partielles en B, nous allons le voir comme une équation aux dérivées partielles en h.

On note k l'inverse de la fonction h dans un voisinage de 0. On a

$$\frac{\partial B_j}{\partial y_j} \circ h = \left(\frac{\partial k}{\partial y_j} \circ h\right) \cdot \frac{\partial}{\partial z} (B_j \circ h) + \left(\frac{\partial \overline{k}}{\partial y_j} \circ h\right) \cdot \frac{\partial}{\partial \overline{z}} (B_j \circ h) \tag{3.13}$$

et de l'égalité **(3.9)**, nous avons

$$B_j \circ h = \left[\left(\frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{z}} - A \cdot \frac{\partial \overline{h}}{\partial z}\right)^{-1}\right]_j \cdot \left(A \cdot \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial \overline{z}}\right) \ . \tag{3.14}$$

En combinant les égalités **(3.13)** et **(3.14)**, l'équation **(3.12)** devient :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \Bigg\{ &\left(\frac{\partial k}{\partial y_j} \circ h\right) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\left[\left(\frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{z}} - A \cdot \frac{\partial \overline{h}}{\partial z}\right)^{-1}\right]_j \cdot \left(A \cdot \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial \overline{z}}\right)\right) \\ &+ \left(\frac{\partial \overline{k}}{\partial y_j} \circ h\right) \cdot \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \left(\left[\left(\frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{z}} - A \cdot \frac{\partial \overline{h}}{\partial z}\right)^{-1}\right]_j \cdot \left(A \cdot \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial \overline{z}}\right)\right) \Bigg\} = 0 \ .\end{aligned} \tag{3.15}$$

L'équation **(3.15)** est une équation aux dérivée partielle d'ordre 2 en h.

Soit h une fonction appartenant au voisinage de la fonction $v : z \longmapsto z$ telle que $\left.\dfrac{\partial h}{\partial z}\right|_{z=0} = \mathrm{Id}$ et $h(0) = 0$. Il existe p tel que $h(z) = z + p(z)$ avec $p(0) = 0$. De même pour k l'inverse de h, il existe q tel que $k(y) = y + q(y)$ avec $q(y) = 0$.
Au voisinage de 0, on a

$$\left(\frac{\partial \overline{h}}{\partial \overline{z}} - A \cdot \frac{\partial \overline{h}}{\partial z}\right)^{-1} = \mathrm{Id} - \frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{z}} + A \cdot \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} + \text{Reste} \;\; ;$$

donc la partie linéaire de **(3.14)** en les dérivées partielles de p est $A_j \cdot \dfrac{\partial p}{\partial z} - \dfrac{\partial p}{\partial \overline{z_j}} - \dfrac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{z_j}} \cdot A + A_j \cdot \dfrac{\partial \overline{p}}{\partial z} \cdot A$.

On note e_j le vecteur ligne $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ où le 1 se trouve en j-ème position.
Au voisinage de 0, nous avons $\dfrac{\partial \overline{k}}{\partial y_j} \circ h = \dfrac{\partial \overline{q}}{\partial y_j} \circ h$ et $\dfrac{\partial k}{\partial y_j} \circ h = e_j + \dfrac{\partial q}{\partial y_j} \circ h$.
Donc le terme du second ordre du linéarisé de l'équation **(3.15)** en les dérivées partielles de p est donné en 0 par l'application

$$L : p \longmapsto -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 p}{\partial z_j \, \partial \overline{z_j}} \;\; .$$

Comme l'opérateur L est elliptique (c'est l'opposé du laplacien), on conclut que l'équation **(3.15)** est elliptique en la fonction v au voisinage de 0. D'autre part, comme la fonction v vérifie l'équation **(3.15)** en 0, par le théorème **3.15**, la fonction h existe et elle est analytique.

Pour terminer la démonstration du théorème, nous allons montrer que B est analytique.

Analyticité de B. Soit $(y_1, \ldots, y_n) = h(z)$ la nouvelle base de coordonnées de $\mathbb{C}^n$. Soit R_j l'opérateur définie par $R_j = \dfrac{\partial}{\partial \overline{y_j}} - B_j \cdot \dfrac{\partial}{\partial y}$. Comme la condition **(3.7)** est indépendante du choix de coordonnées, nous avons comme avant $R_j B_k = R_k B_j$ pour tout $j,\, k \in \{1, \ldots, n\}$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial B_k}{\partial \overline{y_j}} - B_j \cdot \frac{\partial B_k}{\partial y} - \frac{\partial B_j}{\partial \overline{y_k}} + B_k \cdot \frac{\partial B_j}{\partial y} = 0 \;\; . \tag{3.16}$$

De l'égalité **(3.11)**, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, nous avons $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 B_j}{\partial y_j \, \partial \overline{y_k}} = 0$. En exprimant $\dfrac{\partial B_j}{\partial \overline{y_k}}$ à l'aide de **(3.16)** nous obtenons

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{\partial B_k}{\partial \overline{y_j}} - B_j \cdot \frac{\partial B_k}{\partial y} + B_k \cdot \frac{\partial B_j}{\partial y} \right) = 0 \;\; . \tag{3.17}$$

Les termes des dérivées partielles d'ordre 2 du linéarisé de l'équation **(3.17)** en la fonction B est donnée en 0 par l'application

$$L_k : G \longmapsto \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 G_k}{\partial y_j \, \partial \overline{y_j}} - \sum_{j=1}^{n} \left(B_j(0) \frac{\partial^2 G_k}{\partial y_j \, \partial y} - B_k(0) \frac{\partial^2 G_j}{\partial y_j \, \partial y} \right)$$

où G est une application de $\mathbb{C}^n$ à valeurs dans $\mathbb{C}^{n^2}$ (on a identifié $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ avec $\mathbb{C}^{n^2}$).

Si $B(0)$ est suffisamment petit, le système d'équations **(3.17)** pour $k \in \{1, \ldots, n\}$ est elliptique. Ce système est également analytique, ceci indépendamment du fait que les coefficient a_{jk} étaient simplement de classe $\mathscr{C}^\infty$. Donc par le théorème **3.14**, les fonction b_{jk} sont analytiques réelles en les coordonnées

$(y_1, \ldots, y_n)$.

Par la définition et les propriétés des opérateurs R_j, l'équation **(3.10)** admet bien des solutions. Comme B est analytique, les solutions g de **(3.10)** sont analytiques réelles. Ainsi il existe bien une fonction analytique réelle g solution de l'équation **(3.10)** tel que $g(0) = 0$ et $\left.\dfrac{\partial g}{\partial y}\right|_{y=0} = \mathrm{Id}$.

On a donc construit ζ comme étant une fonction analytique réelle des coordonnées $(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{2n})$. Ceci démontre le théorème 3.16. □

3.3 Le théorème de Newlander - Nirenberg

L'objectif de cette partie est présenter la démonstration du théorème de Newlander - Nirenberg. Pour la démonstration de ce théorème, nous utiliserons plusieurs résultats vu dans ce chapitre. Voici maintenant l'énoncé du théorème :

Théorème 3.17 (Newlander - Nirenberg).

Soit M une variété différentielle de dimension $2n$ munie d'une structure presque complexe J. La structure presque complexe J est intégrable si et seulement si le crochet de deux champs de vecteurs quelconques de type $(0,\, 1)$ pour J est de type $(0,\, 1)$ pour J.

La démonstration de ce théorème se fera en deux parties. En un premier temps, on montrera que si J est intégrable alors la condition d'intégrabilité est satisfaite ; c'est la partie facile. La seconde partie portera sur la démonstration de l'autre sens.

Démonstration du théorème 3.17 : On suppose que J est intégrable. Par la proposition 3.2, montrer que le crochet de deux champs de vecteurs de type $(0,\, 1)$ est de type $(0,\, 1)$ revient à monter que l'opérateur N_J est identiquement nulle.

Soit $(x_1,\, y_1, \ldots,\, x_n,\, y_n)$ les coordonnées de M lu à travers une carte. Comme la structure presque-complexe J est intégrable, nous avons

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial y_j} \ \text{ et } \ J\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j} \ \text{ pour } \ j \in \{1, \ldots,\, n\} \ .$$

Soit $X_k = a_k \dfrac{\partial}{\partial x_k}$ et $Y_j = b_j \dfrac{\partial}{\partial y_j}$ deux champs de vecteurs sur M où $a_k,\, b_j \in \mathscr{C}^\infty(M,\, \mathbb{R})$. On a :

$$[X_k,\, Y_j] = \left(a_k \frac{\partial b_j}{\partial x_k}\right) \frac{\partial}{\partial y_j} - \left(b_j \frac{\partial a_k}{\partial y_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

$$[JX_k,\, JY_j] = \left(-a_k \frac{\partial b_j}{\partial y_k}\right) \frac{\partial}{\partial x_j} + \left(b_j \frac{\partial a_k}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial y_k}$$

$$[JX_k,\, Y_j] = \left(a_k \frac{\partial b_j}{\partial y_k}\right) \frac{\partial}{\partial y_j} - \left(b_j \frac{\partial a_k}{\partial y_j}\right) \frac{\partial}{\partial y_k}$$

$$[X_k,\, JY_j] = \left(-a_k \frac{\partial b_j}{\partial x_k}\right) \frac{\partial}{\partial x_j} + \left(b_j \frac{\partial a_k}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} \ ;$$

comme $J\left[\left(a_k \dfrac{\partial b_j}{\partial y_k}\right) \dfrac{\partial}{\partial y_j}\right] = -\left(a_k \dfrac{\partial b_j}{\partial y_k}\right) \dfrac{\partial}{\partial x_j}$, nous avons $N_J(X_k,\, Y_j) = 0$.

Soit $X,\, Y \in \Gamma(TM)$ deux champs de vecteurs qui s'écrivent sous la forme

$$X = \sum_{k=0}^{n} \left(a_k \frac{\partial}{x_k} + b_k \frac{\partial}{\partial y_k}\right) \quad \text{et} \quad Y = \sum_{k=0}^{n} \left(c_k \frac{\partial}{x_k} + d_k \frac{\partial}{\partial y_k}\right) \ .$$

Par le calcul qui vient d'être fait, nous avons $N_J(X, Y) = 0$ par bilinéarité de l'opérateur N_J. Donc l'opérateur N_J est identiquement nul. ☐

Démonstration du théorème 3.17 : On suppose que N_J est identiquement nulle. Dans le théorème, les hypothèses sont locales car les structures presque-complexes définies localement sur la variété M se recollent pour former un endomorphisme de TM. On peut donc supposer que M est un ouvert U de $\mathbb{R}^{2n}$ contenant 0.

Comme $N_J = 0$, par le théorème **3.16**, il existe une base telle que la structure presque-complexe J est donnée par la structure complexe de $\mathbb{C}^n$. On obtient ainsi l'intégrabilité de J.

Au lieu d'utiliser le théorème **3.16**, nous allons montrer ce sens du théorème en faisant l'hypothèse que la structure presque-complexe J est analytique réelle en les coordonnées de U.

La démonstration de ce sens se fera en plusieurs étapes. On commencera par construire deux distributions holomorphes E et E' sur un ouvert de $\mathbb{C}^{2n}$ contenant U. À partir de E et E', nous allons construire deux submersions holomorphes avec lesquelles nous allons travailler pour trouver la structure complexe (d'une variété complexe) qui induit J.

Prolongement de la structure presque-complexe J. Soit $(x_1, \ldots, x_{2n})$ les coordonnées canoniques de U au voisinage de l'origine.
On note $A = (a_{jk})_{1\leq j, k\leq 2n} \in M_{2n}(\mathbb{R})$ la matrice de l'endomorphisme J au voisinage de l'origine où les a_{jk} sont des fonctions analytiques réelles. Pour tout $j \in \{1, \ldots, 2n\}$, on définit ainsi $J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ par

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{k=1}^{2n} a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_k} \quad .$$

Quitte à réduire U, on peut supposer que les fonctions a_{jk} pour $j, k \in \{1, \ldots, 2n\}$ sont des données par des séries entières. Par le théorème du prolongement analytique, on peut étendre les fonctions a_{jk} sur un ouvert V de $\mathbb{C}^{2n}$ contenant U. Les fonctions a_{jk} définies sur V sont holomorphes.

On note $(z_1, \ldots, z_{2n})$ une base de coordonnées de V au voisinage de 0 avec $z_j = x_j + iy_j$ où $x_j, y_j \in \mathbb{R}$ et $(x_1, \ldots, x_{2n})$ est la base de coordonnées de U définit ci-dessus.
Compte tenue du prolongement des fonctions a_{jk}, on peut étendre J sur V. On prolonge J sur V en définissant $J\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)$ par

$$J\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right) = \sum_{k=1}^{2n} a_{kj} \frac{\partial}{\partial z_k} \quad \text{pour} \quad j \in \{1, \ldots, 2n\} \quad .$$

L'application J obtenue est holomorphe sur V.

On note I la structure complexe de $\mathbb{C}^{2n}$. Actuellement, nous avons deux structures presque-complexes sur V (I et J). Sur V, les structures presque-complexes I et J commutent.

Soit E (resp. E') le sous-fibré vectoriel de $T_I^{1,0}V$ associé aux vecteurs propres de J pour la valeur propre i (resp. $-i$). On a :

$$E = T_I^{1,0}V \cap T_J^{1,0}V \quad \text{et} \quad E' = T_I^{1,0}V \cap T_J^{0,1}V \quad .$$

Les distributions E et E' sont holomorphes et de rang n sur V. Comme $N_J = 0$, en étendant la démonstration de la proposition **3.2** au cas où J est complexe, nous avons $[E, E] \subset E$ et $[E', E'] \subset E'$. Ainsi par le théorème **3.11**, les distributions E et E' sont intégrables. Donc localement, en voyant E et E' comme des sous-espace de l'espace (TV, I) (ceci à grâce à la proposition **2.39**), il existe deux submersions holomorphes $\phi : V \longrightarrow \mathbb{C}^n$ et $\psi : V \longrightarrow \mathbb{C}^n$ telles que $E_z = \mathrm{Ker}\,(T_z\phi : T_zV \longrightarrow \mathbb{C}^n)$ et $E'_z = \mathrm{Ker}\,(T_z\psi : T_zV \longrightarrow \mathbb{C}^n)$ pour tout $z \in V$.

Étude des applications ϕ et ψ. Soit W et W' les parties de $\mathbb{C}^n$ définies par $W = \psi(V)$ et $W' = \phi(V)$. Pour tout $z \in V$, on note W_z et W'_z les sous-variétés complexes de V définies par

$$W_z = \phi^{-1}(\{\phi(z)\}) \quad \text{et} \quad W'_z = \psi^{-1}(\{\psi(z)\}) \ .$$

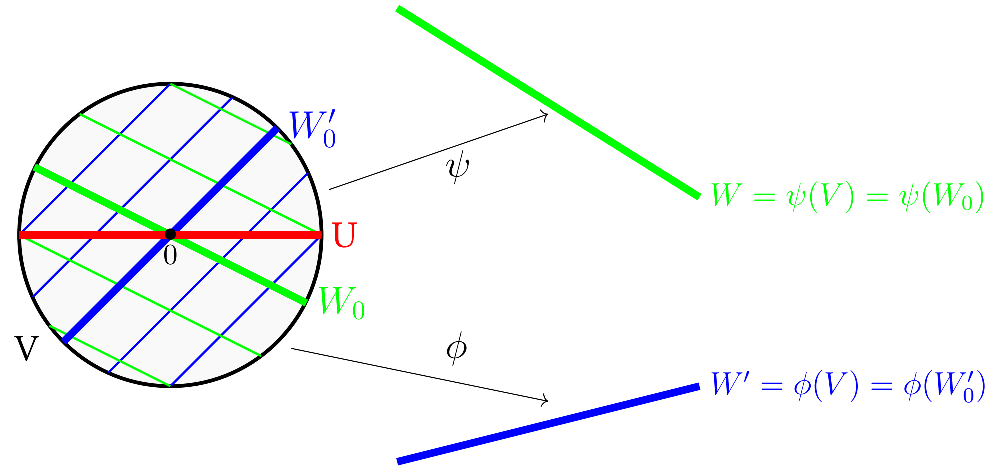
Par construction, nous avons : pour tout $\alpha \in W_z$, $T^{1,0}_\alpha W_z = E_\alpha$ et pour tout $\beta \in W'_z$, $T^{1,0}_\beta W'_z = E'_\beta$; de plus il existe un isomorphisme entre les variétés V et $W_z \times W'_z$ pour tout $z \in V$.

Étude de l'application $\psi_{|W_z} : W_z \longrightarrow W$.
Pour tout $\alpha \in W_z$, l'application $T_\alpha\psi_{|W_z} : T_\alpha W_z = E_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}^n$ est injective ; en effet

$$\mathrm{Ker}(T_\alpha\psi_{|W_z} : E_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}^n) \subset E_\alpha \cap \mathrm{Ker}(T_\alpha\psi : T_\alpha V \longrightarrow \mathbb{C}^n) = E_\alpha \cap E'_\alpha = \{0\} \ .$$

Comme l'application $T_\alpha\psi_{|W_z}$ est surjective, on conclut qu'elle est bijective. Donc par le théorème **2.25** l'application $\psi_{|W_z} : W_z \longrightarrow W$ est biholomorphe.
De même l'application $\phi_{|W'_z} : W'_z \longrightarrow W'$ est biholomorphe.

Restriction de ϕ et ψ à U. En revenant à l'ouvert de départ U, l'application $\psi_U : U \longrightarrow W$ est un difféomorphisme. Pour le voir, il suffit de montrer que l'application $T_x\psi_U : T_xU \longrightarrow \mathbb{C}^n$ est surjective pour tout $x \in U$. Comme pour tout $Y \in \mathbb{C}^n$, il existe $Z \in E_x$ tel que $T_x\psi(Z) = Y$ (car $T_x\psi$ est surjective) et que $T_xU \subset T_xV$, on a l'existence d'un élément $Z' \in E'_x$ tel que $Z + Z' \in T_xU$. L'élément $Z + Z'$ construit vérifie $T_x\psi_U(Z + Z') = Y$; ceci montre la surjectivité. Comme les espace T_xU et $\mathbb{C}^n$ sont de même dimension, on conclut que $T_x\psi_U$ est bijective. Donc $\psi_U : U \longrightarrow W$ est un difféomorphisme.
De même l'application $\phi_U : U \longrightarrow W'$ est un difféomorphisme.



Étude de l'application $\Phi = (\psi, \phi) : V \longrightarrow W \times W'$. Pour tout $z \in V$, l'application $T_z\Phi$ est définie par

$$\begin{array}{rccl} T_z\Phi : & T_zV & \longrightarrow & T_{\psi(z)}W \times T_{\phi(z)}W' \\ & Z & \longmapsto & (T_z\psi(Z),\, T_z\phi(Z)) \end{array} .$$

Soit $Z \in T_zV$. En décomposant Z sous la forme $Z = X + Y$ avec $X \in E_z$ et $Y \in E'_z$, nous avons :

$$T_z\Phi(Z) = \big(T_z\psi_{|W_z}(X),\, T_z\phi_{|W'_z}(Y)\big) \ .$$

Ceci montre que $T_z\Phi$ est bijective. Donc l'application Φ est biholomorphe.
Pour $X \in E_z$ et $Y \in E'_z$, on définit $\Phi_*(X + Y)$ par

$$\Phi_*(X + Y) = \Big(\big(\psi_{|W_z}\big)_* X \,,\, \big(\phi_{|W'_z}\big)_* Y \Big)$$

et pour $(Z, Z') \in T_{\psi(z)}W \times T_{\phi(z)}W'$ on définit $\Phi^*(Z, Z')$ par

$$\Phi^*(Z, Z') = \big(\psi_{|W_z}\big)^* Z + \big(\phi_{|W'_z}\big)^* Z' \ .$$

Si $X \in T^{\mathbb{R}}_u V$ avec $u \in U$, nous avons $T_u\Phi(X) = \big(T_u\psi_{|U}(X),\, T_u\phi_{|X}(X)\big)$, donc

$$\Phi_*(X) = \Big(\big(\psi_{|U}\big)_* X \,,\, \big(\phi_{|U}\big)_* X \Big) \quad \text{et} \quad \Phi_*(X) \in T^{\mathbb{R}}_{\psi(u)}W \times T^{\mathbb{R}}_{\phi(u)}W' \ .$$

Étude de différentes structures presque-complexes. On note J_W (resp. $J_{W'}$) la structure complexe de $\mathbb{C}^{2n}$ restreinte à W (resp. W'). Le but de cette partie est de montrer qu'il existe un isomorphisme entre les espace $(TU,\ J)$ et $(T^{1,0}W,\ J_W)$, ceci achèvera la démonstration.
Soit $z \in V$ fixé et $Z \in T_z^{1,0}V$. Il existe $X \in E_z$ et $Y \in E'_z$ tel que $Z = X + Y$. Par définition de E_z et E'_z, nous avons $J_{|E_z} = +i$ et $J_{|E'_z} = -i$, donc

$$J(Z) = J(X+Y) = JX + JY = iX - iY \quad .$$

Comme $J_W = +i$ sur $T^{1,0}W$ et $J_{W'} = +i$ sur $T^{1,0}W'$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\Phi^* \circ (J_W \oplus (-J_{W'})) \circ \Phi_*(Z) &= \Phi^* \circ (J_W \oplus (-J_{W'})) \left[\left(\psi_{|W_z}\right)_* (X),\ \left(\phi_{|W'_z}\right)_* (Y) \right] \\
&= \Phi^* \left[J_W \left(\psi_{|W_z}\right)_* (X),\ -J_{W'} \left(\phi_{|W'_z}\right)_* (Y) \right] \\
&= \Phi^* \left[i\ \left(\psi_{|W_z}\right)_* (X),\ -i\ \left(\phi_{|W'_z}\right)_* (Y) \right] \\
&= (\psi_{|W_z})^* \left[i\ \left(\psi_{|W_z}\right)_* (X) \right] + (\phi_{|W'_z})^* \left[-i\ \left(\phi_{|W'_z}\right)_* (Y) \right] \\
&= iX - iY \quad ;
\end{aligned}$$

donc sur $T_I^{1,0}V$, on a $\Phi^* \circ (J_W \oplus (-J_{W'})) \circ \Phi_* = J$, c'est-à-dire $(J_W \oplus (-J_{W'})) \circ \Phi_* = \Phi_* \circ J$.

Maintenant, nous allons étudier la structure presque-complexe J sur U.
Soit $u \in U$ fixé et $X \in T_uU$. Comme $T_uU \subset T_u^{\mathbb{R}}V$, l'élément $X - iIX$ appartient à l'espace $T_I^{1,0}V$. Étant donné que sur $T_I^{1,0}V$, nous avons $(J_W \oplus (-J_{W'})) \circ \Phi_* = \Phi_* \circ J$, on a :

$$\begin{aligned}
\Phi_* J(X - iIX) &= (J_W \oplus (-J_{W'})) \left[\Phi_*(X - iIX) \right] \\
&= (J_W \oplus (-J_{W'})) \left[\Phi_*(X) - iI\left(\Phi_* X\right) \right] \quad \text{car } \Phi_* \text{ est } \mathbb{C} - \text{linéaire et } \Phi_* \circ I = I \circ \Phi_* \\
&= (J_W \oplus (-J_{W'})) \left[\left(\psi_{|U}\right)_* (X) - iI\left(\psi_{|U}\right)_* (X),\ \left(\phi_{|U}\right)_* (X) - iI\left(\phi_{|U}\right)_* (X) \right] \\
&= \left(i\ \left[\left(\psi_{|U}\right)_* (X) - iI\left(\psi_{|U}\right)_* (X) \right],\ -i\ \left[\left(\phi_{|U}\right)_* (X) - iI\left(\phi_{|U}\right)_* (X) \right] \right)
\end{aligned}$$

car $\left(\psi_{|U}\right)_* (X) \in T_{\psi(u)}^{\mathbb{R}}W$ et $\left(\phi_{|U}\right)_* (X) \in T_{\phi(u)}^{\mathbb{R}}W'$.

Comme $X \in T_uU$, on a $X - iIX \in T_uU + iT_uU$, donc $J(X - iIX)$ appartient à $T_uU + iT_uU$. Par définition, on a

$$\Phi_* J(X - iIX) = \left(\left(\psi_{|U}\right)_* J(X - iIX),\ \left(\psi_{|U}\right)_* J(X - iIX) \right) \quad .$$

Comme

$$\begin{aligned}
\Phi_* J(X - iIX) &= \Phi_* J(X) - i\Phi_* I(JX) \qquad \text{car } IJ = JI \\
&= \Phi_* J(X) - iI\left[\Phi_* J(X)\right] \qquad \text{car } \Phi \text{ est holomorphe et } \Phi_* \circ I = I \circ \Phi_* \quad ,
\end{aligned}$$

on conclut que

$$\begin{aligned}
\left(\psi_{|U}\right)_* (JX) - iI\left(\psi_{|U}\right)_* (JX) &= \left(\psi_{|U}\right)_* J(X - iIX) \\
&= i\ \left[\left(\psi_{|U}\right)_* (X) - iI\left(\psi_{|U}\right)_* (X) \right] \\
&= J_W \left(\left[\left(\psi_{|U}\right)_* (X) - iI\left(\psi_{|U}\right)_* (X) \right] \right) \\
&= J_W \left(\left(\psi_{|U}\right)_* (X) \right) - iIJ_W \left(\left(\psi_{|U}\right)_* (X) \right) \quad .
\end{aligned}$$

En prenant la partie réelle de l'égalité ci-dessus, nous avons $(\psi_{|U})_*(JX) = J_W(\psi_{|U})_*(X)$. Ainsi, sur U nous avons $J = (\psi_{|U})^* \circ J_W \circ (\psi_{|U})_*$. Donc la structure presque-complexe J est intégrable. Ceci achève la démonstration. □

Index

Bibliographie

[Biq] Olivier Biquard, *Introduction to differential geometry*. Note de cours de M2, UPMC, 2008.

[Dem] Jean-Pierre Demailly, *Complex analytic and differential geometry*. Notes de cours, Université de Grenoble I, 2012, voir https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/books.html.

[Huy] Daniel Huybrechts, *Complex geometry : an introduction*. Springer, 2005.

[Mal] Bernard Malgrange, *Sur l'intégrabilité des structures presque-complexes*. Séminaire Jean Leray, n°1 (1968-1969).

[Nir] Louis Nirenberg, *Lectures on linear partial differential equations*. Conference Board of the Mathematical Sciences of the AMS, 1973.

[Pau] Frédéric Paulin, *Géométrie différentielle élémentaire*. Notes de cours de première année de mastère, Ecole Normale Supérieure, 2007, voir https://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/cours_geodiff.pdf.

[Voi] Claire Voisin, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*. Société Mathématique de France, 2002.