La Conjecture de Bieberbach

Emilie GUILLOUZIC et Fabien KÜTLE

2015-2016

Ludwig Bieberbach

Sommaire

Introduction

La conjecture de Bieberbach est, malgré une formulation élémentaire, un problème difficile qui a tenu tête à de nombreux mathématiciens. En effet elle a été démontrée par Louis de Branges en 1984, 68 ans après qu'elle a été énoncée par Ludwig Bieberbach.

Voici l'énoncé en question, les objets évoqués seront développés plus tard dans le mémoire.

LA CONJECTURE DE BIEBERBACH (1918 ; Louis de Branges 1984)

Soit f une fonction holomorphe injective sur le disque unité, noté D, dont le développement en série entière est de la forme :

$$\forall z \in D, \quad f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots, \quad \text{avec } a_2, a_3, \dots \in \mathbb{C}.$$

Alors :

$$\forall n \geq 2, \quad |a_n| \leq n,$$

De plus, l'inégalité est stricte pour tout n supérieur ou égal à 2, sauf si f est « une rotation de la fonction de Koebe ».

Dans ce mémoire nous allons démontrer les cas $n = 2$ et $n = 3$.

Louis de Branges

1 Cadre du problème

On introduit une classe de fonctions correspondant à l'énoncé de la conjecture.

Définition 1. *On appelle la classe schlicht ("simple" en allemand) normalisée, notée $\mathcal{S}$, l'ensemble des fonctions holomorphes f injectives de D dans $\mathbb{C}$ telles que :*

1. $f(0) = 0$,
2. $f'(0) = 1$.

On appelle $\mathcal{S}$-fonctions les éléments de cette classe.

Conséquence :

Une $\mathcal{S}$-fonction s'écrit donc sous la forme :

$$\forall z \in D, \quad f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots = z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n \quad \text{où} \quad \forall n \geq 2, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Exemple 2. *L'identité sur D est un élément de $\mathcal{S}$.*

On peut se ramener à $\mathcal{S}$ sans problème à partir d'une fonction holomorphe injective $f : D \to \mathbb{C}$, en posant $g : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{f(z)-f(0)}{f'(0)} \end{array}$. Notons qu'on a bien dans ce cas $f'(0) \neq 0$ car sinon par le théorème de structure locale des fonctions holomorphes, on aurait un voisinage de 0 tel que tout w dans ce voisinage admettrait au moins deux antécédents par f. De manière générale, la non-annulation des dérivées de fonctions holomorphes injectives est un corollaire du théorème de structure locale.

Proposition 3. *La fonction $g : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{f(z)-f(0)}{f'(0)} \end{array}$ est dans $\mathcal{S}$.*

Démonstration. Pour tout $z \in D$,

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{f(z) - f(0)}{f'(0)} \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n\right) - f(0)}{f'(0)} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n! f'(0)} z^n \\ &= z + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n! f'(0)} z^n. \end{aligned}$$

□

Ainsi, on peut déduire aisément les propriétés de f à partir de celles de g, car g est une transformation affine de f.

2 Étude de la fonction de Koebe

2.1 Définition

Dans cette section, on introduit la fonction qui intervient dans le cas d'égalité de la conjecture. On appelle *fonction de Koebe* la fonction définie sur D par :

$$\forall z \in D, \quad k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Proposition 4. *On peut écrire k comme la somme d'une série entière sur D :*

$$\forall z \in D, \quad k(z) = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots$$

Démonstration. On remarque que k s'écrit également :

$$\forall z \in D, \quad k(z) = z \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{1-z}\right].$$

Or la fonction $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ est développable en série entière sur le disque D :

$$\forall z \in D, \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$

Puisque la somme d'une série entière est dérivable terme à terme sur son disque ouvert de convergence, on a :

$$\forall z \in D, \quad z\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{1-z}\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} nz^{n-1},$$

d'où

$$\forall z \in D, \quad k(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} nz^n.$$

□

2.2 Injectivité de la fonction de Koebe

Pour montrer que k appartient à $\mathcal{S}$, commençons par écrire k sous une autre forme :

Lemme 5. *Pour tout $z \in D$,*

$$k(z) = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1\right].$$

Démonstration. Pour tout $z \in D$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\ \left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1\right] &= \frac{1}{4}\left[\frac{z^2+2z+1-z^2+2z-1}{(1-z)^2}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{4z}{(1-z)^2}\right] \\
&= \frac{z}{(1-z)^2} \\
&= k(z).
\end{aligned}$$

□

Corollaire 6. *On pose :*

$$s : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 0\} \\ z & \longmapsto & \frac{1+z}{1-z} \end{array}$$

$$t : \begin{array}{ccc} \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 0\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_- \\ s & \longmapsto & s^2 \end{array}$$

$$w : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_- & \longrightarrow & \mathbb{C}\backslash]-\infty, -\frac{1}{4}] \\ t & \longmapsto & \frac{1}{4}(t-1) \end{array}$$

On a $k = w \circ t \circ s$.

Proposition 7. *Avec les mêmes notations, s, t et w sont bijectives.*

Démonstration.

1. • L'application s est bien définie :

$$\begin{aligned}
\forall z \in D, \quad s(z) &= \frac{1+z}{1-z} \\
&= \frac{(1+z)(1-\overline{z})}{|1-z|^2} \\
&= \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} + i\frac{z-\overline{z}}{|1-z|^2}
\end{aligned}$$

Comme z est dans D, on a $|z| < 1$. Ainsi $\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} > 0$.
• Soit $z, y \in D$ tels que $s(z) = s(y)$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{1+z}{1-z} &= \frac{1+y}{1-y}\\(1+z)(1-y) &= (1+y)(1-z)\\1+z-y-yz &= 1+y-z-yz\\2z &= 2y\\\text{d'où}\quad z &= y.\end{aligned}$$

Donc s est injective.
• En particulier, s est bijective de D dans son image.
Soit $r \in \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$, on a :

$$\frac{r-1}{r+1} \in D \quad \text{et} \quad s\left(\frac{r-1}{r+1}\right) = r.$$

Ainsi on a trouvé l'inverse de s :

$$s^{-1}(r) = \frac{r-1}{r+1}.$$

2. • L'application t est bien définie :

$$\forall s \in \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 0\}, \quad s^2 = \mathrm{Re}(s)^2 + 2i\mathrm{Re}(s)\mathrm{Im}(s) - \mathrm{Im}(s)^2.$$

Si $\mathrm{Im}(s) = 0$, alors $s^2 = \mathrm{Re}(s)^2 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$. Si $\mathrm{Im}(s) \neq 0$, alors $\mathrm{Re}(s)\mathrm{Im}(s) \neq 0$. D'où $s^2 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$.
• Soit $x, y \in \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$ tels que $x^2 = y^2$.
On a nécessairement $x = y$, donc t est bien injective.
• Soit $y \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$.
Il existe $\theta \in]-\pi, \pi[$ et $r > 0$ tels que $y = re^{i\theta}$. On pose $x = \sqrt{r}e^{\frac{\theta}{2}}$. On a $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, d'où $\mathrm{Re}(x) > 0$ et $t(x) = y$. Donc t est surjective.

3. • L'application w est bien définie :

$$\forall t \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-, \quad w(t) = \frac{1}{4}(t-1) \in \mathbb{C}\backslash\left]-\infty, -\frac{1}{4}\right].$$

• La fonction w est affine, donc bijective sur son image.

□

Proposition 8. *La fonction de Koebe est l'unique $\mathcal{S}$-fonction satisfaisant le cas d'égalité de la conjecture de Bieberbach pour tout entier n supérieur ou égal à 2, à rotation près.*

Remarque : Expliquons la notion de "rotation" évoquée ci-dessus.

Pour $f \in \mathcal{S}$, on appelle *la rotation de f d'angle* $\alpha \in \mathbb{R}$ la fonction f_α définie par : $\forall z \in D,\ f_\alpha(z) = e^{-i\alpha} f(e^{i\alpha} z)$. En d'autres termes, on conjugue f par une rotation (vue comme une rotation du disque à la source, et du plan complexe à l'arrivée).

Remarquons qu'en écrivant :

$$\forall z \in D, \quad f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad \text{et} \quad f_\alpha(z) = z + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n z^n,$$

on a $b_n = a_n e^{i(n-1)\alpha}$, d'où $|a_n| = |b_n|$, ce qui est cohérent avec l'énoncé de la propriété 8.

3 Motivation : théorème pour les coefficients réels

Pour nous convaincre de la véracité de la conjecture, commençons par la démontrer dans le cas où tous les coefficients sont dans $\mathbb{R}$.

Proposition 9. *Soit f une $\mathcal{S}$-fonction dont tous les coefficients de Taylor sont réels. Pour tout $z \in D$, si $\mathrm{Im}(z) > 0$ alors $\mathrm{Im}(f(z)) > 0$.*

Démonstration.
Comme les coefficients de f sont réels, on a : $\forall z \in \mathbb{R},\ f(z) \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, si pour $z \in \mathbb{C}$ on a $f(z) \in \mathbb{R}$, alors $f(\overline{z}) = \overline{f(z)} = f(z)$. Par injectivité de f, on a alors $\overline{z} = z$. Par conséquent $z \in \mathbb{R}$.

Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Im}(z) > 0$ et $\mathrm{Im}(f(z)) \leq 0$.
Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 > t_n > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f(it_n) &= it_n + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n (it_n)^n \\ &= it_n \left(1 + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n (it_n)^{n-1}\right) \\ &= it_n\Big(1 + o(1)\Big). \end{aligned}$$

Donc pour n suffisamment grand, on a $\mathrm{Im}(f(it_n)) > 0$.
Notons $D_+ = \{z \in D \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$. On a alors montré l'existence d'un élément w de D_+ tel que $f(w) \in D_+$.
Comme D_+ est convexe, le segment joignant z et w est inclus dans D_+. Par continuité de f, et puisque $\mathrm{Im}(f(z)) \leq 0$ et $\mathrm{Im}(f(w)) > 0$, l'image de ce segment par f intersecte l'axe des réels.
Par ce qui a été montré au début de la démonstration le segment joignant z et w croise également l'axe des réels, ce qui est absurde par convexité de D_+. □

Démontrons désormais la conjecture de Bieberbach dans le cas où les coefficients sont réels.

Démonstration.
Soit $f : z \mapsto z + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n z^n \in S$ avec $a_2, a_3, \ldots \in \mathbb{R}$.
Soit $\theta \in]0, \pi[$ et $r \geq 0$.
On a

$$\mathrm{Im}(f(re^{i\theta})) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \sin(n\theta). \tag{$*$}$$

Par la théorie de Fourier, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n r^n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Im} f(re^{i\theta}) \sin(n\theta) d\theta = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \mathrm{Im} f(re^{i\theta}) \sin(n\theta) d\theta$$

car $\theta \mapsto \mathrm{Im} f(re^{i\theta})$ est impaire par $(*)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \theta \mapsto \sin(n\theta)$ est impaire.

Lemme 10.

$$\forall \theta \in]0,\pi[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |\sin(n\theta)| \leq n \sin(\theta).$$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} |a_n| r^n &\leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\mathrm{Im} f(re^{i\theta})||\sin(n\theta)| d\theta \quad \text{par inégalité triangulaire,} \\ &\leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\mathrm{Im} f(re^{i\theta})| n \sin(\theta) d\theta \quad \text{par le lemme,} \\ &\leq nr. \end{aligned}$$

En faisant tendre r vers 1, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |a_n| \leq n.$$

□

Démontrons le lemme :

Démonstration. Procédons par récurrence.
L'initialisation est évidente.
Supposons désormais le résultat vrai pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.
On a

$$\forall \theta \in]0;\pi[, \quad \sin((n+1)\theta) = \sin(n\theta)\cos(\theta) + \sin(\theta)\cos(n\theta).$$

Donc $\forall \theta \in]0;\pi[$,

$$\begin{aligned} |\sin((n+1)\theta)| &\leq |\sin(n\theta)||\cos(\theta)| + |\sin(\theta)||\cos(n\theta)| \\ &\leq |\sin(n\theta)| + |\sin(\theta)| \\ &\leq n\sin(\theta) + \sin(\theta) \quad \text{par hypothèse de récurrence,} \\ &\leq (n+1)\sin(\theta). \end{aligned}$$

Ce qui conclut. □

Nous allons désormais démontrer la conjecture de Bieberbach avec des coefficients complexes (cas général) dans les cas où $n = 2$ et $n = 3$.

4 Cas particulier $n = 2$

Théorème 11. ***Théorème de Bieberbach*** *(1916)*
Soit $f : z \mapsto z + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n z^n \in S$. *Alors* $|a_2| \leq 2$.
De plus, il y a égalité si et seulement si f est une rotation de la fonction de Koebe.

Pour aboutir à cette inégalité, nous allons nous intéresser à une certaine classe de fonction dérivée de la classe $\mathcal{S}$, que l'on étudiera grâce au théorème de l'aire. Lors de la preuve du théorème de Bieberbach, on verra le lien entre cette classe et la classe $\mathcal{S}$.

Définition 12. *On appelle Σ la classe de fonctions holomorphes injectives sur* $\Delta = \left\{z \,\middle|\, |z| > 1\right\}$ *de la forme* $g : z \mapsto z + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^{-n}$ *avec* $b_0, b_1, \ldots \in \mathbb{C}$. *On appelle Σ-fonctions les éléments de Σ.*

Remarque : Les Σ-fonctions ont un pôle simple, de résidu 1 en l'infini.

Théorème 13. ***Théorème de l'aire***
Si $g : z \mapsto z + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^{-n}$ *appartient à Σ, alors* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n|b_n|^2 \leq 1$.

Démonstration. Soit $g \in \Sigma$, on pose $E = \mathbb{C} \backslash g(\Delta)$.
Pour calculer l'aire de E, on va l'approcher par des surfaces à bord régulier. En effet, le bord de E risque d'être irrégulier car l'image de g sur la frontière n'est a priori pas toujours bien définie. Cela poserait problème pour appliquer le théorème de Stokes.
Pour tout $r > 1$, on pose $E(r) = \mathbb{C} \backslash \{g(z) \,\big|\, |z| > r\}$. On a donc $\text{aire}(E) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \text{aire}(E(r))$ car E est l'union croissante des $E(r)$.
Or pour $r > 1$,

$$\frac{1}{\pi}\text{aire}(E(r)) = \frac{1}{\pi} \iint_{E(r)} dxdy.$$

On effectue le changement de variable suivant :

$$w : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x, y) & \longmapsto & x + iy \end{array}.$$

On a alors $dw = dx + idy$ et $d\overline{w} = dx - idy$.
Le formalisme des formes différentielles donne :

$$\begin{aligned} d\overline{w} \wedge dw &= (dx - idy) \wedge (dx + idy) \\ &= idx \wedge dy - (-idx \wedge dy) \\ &= 2idx \wedge dy. \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{1}{\pi}\text{aire}(E(r)) = \frac{1}{2i\pi}\iint_{E(r)} d\overline{w}\wedge dw.$$

On pose $\gamma(r) = \{g(z)\big||z| = r\}$ le contour de $E(r)$ (qui est régulier comme image de $[0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\theta \longmapsto g(re^{i\theta})$). D'après le théorème de Stokes on a :

$$\begin{aligned}\int_{\gamma(r)} \overline{w}\, dw &= \iint_{E(r)} d(\overline{w}\, dw)\\ &= \iint_{E(r)} d\overline{w}\wedge dw + \overline{w}\wedge d(dw).\end{aligned}$$

Or $d(dw) = d^2x + id^2y = 0$, d'où $\int_{\gamma(r)} \overline{w}\, dw = \iint_{E(r)} d\overline{w}\wedge dw$. Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\text{aire}(E(r)) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(r)} \overline{w}\, dw\\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=r} \overline{g(z)}g'(z)\, dz,\end{aligned}$$

la dernière égalité étant obtenue par changement de variable pour les intégrales curvilignes.
On procède maintenant au changement de variable $z = re^{it}$, de sorte que :

$$\frac{1}{\pi}\text{aire}(E(r)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} re^{it}g'(re^{it})\overline{g(re^{it})}\, dt.$$

Or on sait que g s'écrit : $\forall z \in \mathbb{C}$, $g(z) = z + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^{-n}$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\text{aire}(E(r)) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} re^{it}\left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} nb_n r^{-n-1}e^{-i(n-1)t}\right)\left(re^{-it} - \sum_{n=0}^{+\infty} n\overline{b_n}r^{-n}e^{int}\right) dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(re^{it} - \sum_{n=1}^{+\infty} nb_n r^{-n}e^{-int}\right)\left(re^{-it} - \sum_{n=0}^{+\infty} n\overline{b_n}r^{-n}e^{int}\right) dt.\end{aligned}$$

Or

$$\forall l \in \mathbb{Z},\quad \int_0^{2\pi} e^{ilt}dt = \left\{\begin{array}{c} 0 \text{ si } l \neq 0\\ 2\pi \text{ si } l = 0\end{array}\right. .$$

Comme g est une série de Laurent sur Δ, elle converge normalement sur tout compact de Δ. On peut alors intervertir les signes somme et intégrale dans le calcul de l'aire de $E(r)$, d'où

$$\frac{1}{\pi}\text{aire}(E(r)) = r^2 - \sum_{n=0}^{+\infty} n|b_n|^2 r^{-2n}.$$

Par définition d'une aire, pour tout $r \geq 1$, aire$(E(r)) \geq 0$.
Donc : $\forall m \geq 1,\ r^2 \geq \sum\limits_{n=0}^{m} n|b_n|^2 r^{-2n}$.
On fait tendre r vers 1^+, d'où : $\forall m \geq 1,\ \sum\limits_{n=0}^{m} n|b_n|^2 \leq 1$.
Enfin, en faisant tendre m vers $+\infty$ on obtient le résultat voulu :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n|b_n|^2 \leq 1.$$

□

Corollaire 14. *(du théorème de l'aire).*

$$Si \quad g : \begin{array}{ccc} \Delta & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (b_n z^{-n}) \end{array} \in \Sigma \ ,\ alors\ |b_1| \leq 1.$$

De plus, on a l'égalité si et seulement si $g(z) = z + b_0 + \frac{e^{i\alpha}}{z}$*, avec* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(car* $|e^{i\alpha}| = 1$*).*

On peut à présent démontrer le théorème de Bieberbach. Pour ce faire, on va partir d'une $\mathcal{S}$-fonction, et on se ramènera à une Σ-fonction pour pouvoir appliquer le théorème de l'aire. Ainsi, on verra que l'estimation des coefficients des Σ-fonctions obtenue précédemment nous donnera une estimation des coefficients des $\mathcal{S}$-fonctions.

Démonstration. (du théorème de Bieberbach).
Soit $f \in \mathcal{S}$.
On construit $h \in \Sigma$ à partir de f comme suit. Ecrivons pour tout z dans D,

$$f(z) = z + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

On a

$$\forall z \in D, \quad f(z^2) = z^2 \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{2n-2}\right).$$

Posons

$$\forall z \in D, \quad \epsilon(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^{2n-2}.$$

La fonction holomorphe $1 + \epsilon$ ne s'annule pas sur D qui est simplement connexe, elle admet donc une racine carrée, notée r ; on la construit via un logarithme η de $1 + \epsilon$ vérifiant $\eta(0) = 0$.
Posons alors pour tout z dans D : $g(z) = zr(z)$. Montrons que g est injective.

Soit $w,\, z \in D$ tels que $g(w) = g(z)$.
On a alors : $g(w)^2 = g(z)^2$, donc $f(w^2) = f(z^2)$.
Comme f est injective, on a $w^2 = z^2$, d'où $z = w$ ou $z = -w$.

Supposons que $z = -w$.
Soit η le logarithme de la fonction $1 + \epsilon$ comme mentionné plus haut ; alors :

$$\eta(z) = \int_0^z \frac{\epsilon'(a)}{1+\epsilon(a)} da.$$

On réalise le changement de variable $a = tz$ de sorte que :

$$\eta(z) = \int_0^1 \frac{\epsilon'(tz)}{1+\epsilon(tz)} z dt \qquad \text{et} \qquad \eta(-z) = \int_0^1 \frac{\epsilon'(-tz)}{1+\epsilon(-tz)} (-z) dt.$$

Or ϵ est paire puisque c'est une série entière comportant uniquement des monômes de degré pair, et pour la même raison, ϵ' est impaire. Donc $\eta(z) = \eta(-z)$.
D'où

$$\begin{aligned} g(w) &= -z\exp(\frac{1}{2}\eta(-z)) \\ &= -z\exp(\frac{1}{2}\eta(z)) \\ &= -g(z). \end{aligned}$$

On a alors nécessairement $g(w) = g(z) = 0$, donc $f(w^2) = f(z^2) = 0$. Par injectivité de f on a alors $z = w = 0$.

Donc dans tous les cas on a : $z = w$. On a donc montré l'injectivité de g.

Posons

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash D, \quad h(z) = \frac{1}{g(1/z)}.$$

Pour tout z au voisinage de l'infini, on a (en notant la racine carrée de manière abusive, et en la construisant de la même manière que précédemment) :

$$\begin{aligned} h(z) &= \left(\frac{1}{z^2} + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^{-2n}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= z\left(1 + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^{-2n+2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= z\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^{-2n+2} + \dots\right) \\ &= z - \frac{a_2}{2z} + \dots \end{aligned}$$

Ainsi on voit que h est une Σ-fonction. Par le corollaire du théorème de l'aire, on a donc $|a_2| \leq 2$.

Il nous reste à montrer le cas d'égalité.
D'après le théorème de l'aire, il y a l'égalité si et seulement si $\forall z \in \mathbb{C}\backslash D,\ h(z) = z + \frac{b}{z}$ avec $|b| = 1$ (car $g(0) = 0$).
De plus,

$$\begin{aligned}
\forall z \in \mathbb{C}\backslash D, \quad h(z) = z + \frac{b}{z} &\iff \forall z \in \mathbb{C}\backslash D, \quad g(1/z) = \frac{1}{z + \frac{b}{z}} \\
&\iff \forall z \in D, \quad g(z) = \frac{z}{1 + bz^2} \\
&\iff \forall z \in D, \quad f(z) = \frac{z}{(1 + bz)^2} \\
&\iff f \text{ est une rotation de la fonction de Koebe.}
\end{aligned}$$

$\square$

Remarque : La nécessité du passage par la racine carrée n'est pas claire a priori. Cependant si on avait posé : $\forall z \in \mathbb{C}\backslash D,\ h(z) = \frac{1}{f(\frac{1}{z})}$, on aurait :

$$\begin{aligned}
h(z) &= \left(\frac{1}{z} + a_2\frac{1}{z^2} + a_3\frac{1}{z^3} + o\left(\frac{1}{z^3}\right)\right)^{-1} \\
&= z\left(1 + a_2\frac{1}{z} + a_3\frac{1}{z^2} + o\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)^{-1} \\
&= z\left(1 - a_2\frac{1}{z} - a_3\frac{1}{z^2} + a_2^2\frac{1}{z^2} + o\left(\frac{1}{z^2}\right)\right) \\
&= z - a_2 + b_1\frac{1}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{où} \quad b_1 = a_2^2 - a_3.
\end{aligned}$$

On ne peut rien dire sur le coefficient a_2 à partir de cette expression.

5 Quelques conséquences du théorème de Bieberbach

Le principe observé dans la preuve précédente (qui consiste à utiliser des transformations linéaires sur une $\mathcal{S}$-fonction ou sur une Σ-fonction, puis à appliquer un théorème connu sur les coefficients) donne des conséquences intéressantes au théorème de Bieberbach. Certaines d'entre elles nous éclairent un peu plus sur la conjecture de Bieberbach.

Théorème 15. ***Théorème du quart de Koebe.***
Soit $f \in \mathcal{S}$. On suppose qu'il existe $w_0 \in \mathbb{C}$ tel que $w_0 \notin f(D)$. Alors $|w_0| \geq \frac{1}{4}$. L'égalité peut avoir lieu si et seulement si f est une rotation de la fonction de Koebe.

Démonstration.
On remarque que $w_0 \neq 0$ car $f(0) = 0$.
On pose

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\backslash\{w_0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ w & \longmapsto & \frac{w_0 w}{w_0 - w} \end{array}.$$

La fonction h est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{w_0\}$.
Soit $w, z \in \mathbb{C}\backslash\{w_0\}$ tels que $h(z) = h(w)$. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{w_0 w}{(w_0 - w)} &= \frac{w_0 z}{(w_0 - z)} \\ w(w_0 - z) &= (w_0 - w)z \\ w_0 w &= w_0 z. \end{aligned}$$

Puisque w_0 est non nul, on a $w = z$, d'où h est injective. Alors $g = h \circ f$ est également holomorphe et injective.

Montrons que g est dans $\mathcal{S}$, ce qui équivaut à montrer que $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$.
On a $g(0) = h(f(0)) = h(0) = 0$, et :

$$\begin{aligned} g'(0) &= f'(0)h'(f(0)) \\ &= 1 \times h'(0) \quad \text{car } f \in S \\ &= \frac{w_0(w_0 - 0) + w_0 \times 0}{(w_0 - 0)^2} \\ &= \frac{w_0^2}{w_0^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc g est dans $\mathcal{S}$.

Regardons f et g sous les formes suivantes :

$$\forall z \in D, \quad f(z) = z + a_2 z^2 + \dots \quad \text{et} \quad g(z) = z + b_2 z^2 + \dots$$

Calculons b_2 : on a $\forall z \in D$,

$$g'(z) = \frac{w_0^2 f'(z)}{(w_0 - f(z))^2}$$

et

$$g''(z) = \frac{w_0^2 (w_0 - f(z))^2 f''(z) + 2 w_0^2 f'(z)(w_0 - f(z)) f'(z)}{(w_0 - f(z))^4}.$$

$$\text{Ainsi} \quad b_2 = \frac{g''(0)}{2} = \frac{2w_0^4 a_2 + 2w_0^3}{2w_0^4}.$$

$$\text{Donc} \quad b_2 = a_2 + \frac{1}{w_0}.$$

$$\text{D'où} \quad \forall z \in D,\ g(z) = z + (a_2 + \frac{1}{w_0}) z^2 + \dots.$$

Comme $g \in \mathcal{S}$, on a par le théorème de Bieberbach,

$$|a_2 + \frac{1}{w_0}| \leq 2.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, et le fait que $|a_2| \leq 2$ on a les inégalités suivantes :

$$|\frac{1}{w_0}| - |a_2| \leq 2$$

$$1 \leq (2 + |a_2|)|w_0|$$

$$1 \leq 4|w_0|$$

$$\text{donc} \quad \frac{1}{4} \leq |w_0|.$$

Supposons $|w_0| = \frac{1}{4}$.
On a $1 \leq (2 + |a_2|)|w_0|$, donc $4 \leq 2 + |a_2|$, c'est-à-dire : $2 \leq |a_2|$. Or $|a_2| \leq 2$ d'après le théorème de Bieberbach puisque $f \in \mathcal{S}$. On a alors $|a_2| = 2$. Par le cas d'égalité du théorème de Bieberbach, on en déduit que f est une rotation de la fonction de Koebe.

Réciproquement si f est une rotation d'angle $\alpha \in \mathbb{R}$ de la fonction de Koebe, on connaît son image (cf page 6). On remarque bien qu'on peut avoir dans ce cas $|w_0| = \frac{1}{4}$ (en prenant par exemple $w_0 = -\frac{1}{4} e^{-i\alpha}$). $\square$

Remarque : On a étudié le théorème de Bieberbach à l'origine. Cependant, par composition par un automorphisme du disque qui envoie 0 sur $z_0 \in D$, on peut obtenir un résultat similaire en $z_0 \in D$. Cet automorphisme est défini par :

$$\forall w \in D, \quad A(w) = \frac{w + z_0}{1 + w\overline{z_0}}.$$

Alors $f \circ A$ est une fonction holomorphe injective. Normalisons-la pour obtenir une fonction dans $\mathcal{S}$. Pour cela, posons :

$$\forall w \in D, \quad h(w) = \frac{f(A(w)) - f(z_0)}{(1 - |z_0|^2) f'(z_0)}.$$

Notons que h est bien définie car $|z_0| < 1$, et $f'(z_0) \neq 0$ puisque f est holomorphe injective.
On a :

- $h(0) = 0$.

- Pour tout $w \in D$,

$$h'(w) = \frac{A'(w) f'(A(w))}{(1 - |z_0|^2) f'(z_0)}$$

avec

$$A'(w) = \frac{1 + w\overline{z_0} - (w + z_0)\overline{z_0}}{(1 + w\overline{z_0})^2} = \frac{1 - |z_0|^2}{(1 + w\overline{z_0})^2}.$$

Comme $A'(0) = 1 - |z_0|^2$ et $A(0) = z_0$, on a $h'(0) = 1$.

- Pour tout $w \in D$,

$$h''(w) = \frac{A''(w) f'(A(w)) + (A'(w))^2 f''(A(w))}{(1 - |z_0|^2) f'(z_0)}$$

avec

$$A''(w) = \frac{-2\overline{z_0}(1 - |z_0|^2)(1 + w\overline{z_0})}{(1 + w\overline{z_0})^4} = \frac{-2\overline{z_0}(1 - |z_0|^2)}{(1 + w\overline{z_0})^3}.$$

Comme $A''(0) = -2\overline{z_0}(1 - |z_0|^2)$, on a :

$$h''(0) = \frac{-2\overline{z_0}(1 - |z_0|^2) f'(z_0) + f''(z_0)(1 - |z_0|^2)^2}{(1 - |z_0|^2) f'(z_0)}.$$

D'où

$$h''(0) = 2(1 - |z_0|^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - 2\overline{z_0}.$$

On peut donc écrire :

$$\forall w \in D, \quad h(w) = w + (\frac{1}{2}(1-|z_0|^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \overline{z_0})w^2 + a_3 w^3 + ...$$

On a donc h dans $\mathcal{S}$. Le théorème de Bieberbach appliqué à h donne alors :

$$\forall z_0 \in D, \quad \left|\frac{1}{2}(1-|z_0|^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \overline{z_0}\right| \leq 2,$$

d'où

$$\forall z_0 \in D, \quad \left|z_0\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{2z_0\overline{z_0}}{(1-|z_0|^2)}\right| \leq \frac{4|z_0|}{(1-|z_0|^2)},$$

c'est-à-dire

$$\forall z_0 \in D, \quad \left|z_0\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{2|z_0|^2}{(1-|z_0|^2)}\right| \leq \frac{4|z_0|}{(1-|z_0|^2)}.$$

Nous allons à présent utiliser cette inégalité pour démonter l'énoncé suivant :

Théorème 16. ***Théorème de Distorsion.***
Soit f une $\mathcal{S}$-fonction et soit $z \in D$, alors :

1.
$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3},$$

2.
$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}.$$

Démonstration.

1. Soit $z \in D$. En écrivant $z = re^{i\alpha}$, l'inégalité énoncée juste avant le théorème donne :
$$\left|re^{i\alpha}\frac{f''(re^{i\alpha})}{f'(re^{i\alpha})} - \frac{2r^2}{1-r^2}\right| \leq \frac{4r}{1-r^2},$$
c'est-à-dire
$$\left|e^{i\alpha}\frac{f''(re^{i\alpha})}{f'(re^{i\alpha})} - \frac{2r}{1-r^2}\right| \leq \frac{4}{1-r^2}.$$

   Remarque : La fonction f' ne s'annule pas sur le domaine D, qui est simplement connexe, on peut donc définir un logarithme de f'. On notera alors de manière abusive $\begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto & \log((1-|z|^2)f'(z)) \end{array}$ la fonction définie comme la somme de $\begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto & \log(1-|z|^2) \end{array}$ et du logarithme de f'.

On remarque que

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big(\log((1-r^2)f'(re^{i\alpha}))\Big) = \frac{e^{i\alpha}f''(re^{i\alpha})}{f'(re^{i\alpha})} - \frac{2r}{(1-r^2)}.$$

Donc

$$\left|\frac{\partial}{\partial r}\Big(\log((1-r^2)f'(re^{i\alpha}))\Big)\right| \leq \frac{4r}{(1-r^2)}. \qquad (*)$$

On a

$$|\log((1-r^2)f'(re^{i\alpha})) - \log(1\times f'(0))| = \left|\int_0^r \frac{\partial}{\partial \rho}\Big(\log((1-\rho^2)f'(\rho e^{i\alpha}))\Big)\,d\rho\right|.$$

Puisque $f'(0)=1$, cela revient à :

$$\begin{aligned}|\log((1-r^2)f'(re^{i\alpha}))| &\leq \int_0^r \left|\frac{\partial}{\partial \rho}\Big(\log((1-\rho^2)f'(\rho e^{i\alpha}))\Big)\right| d\rho \quad \text{par inégalité triangulaire,}\\ &\leq \int_0^r \frac{4}{1-\rho^2}\,d\rho \quad \text{par } (*).\end{aligned}$$

Or

$$\frac{1}{1-\rho^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\rho}+\frac{1}{1-\rho}\right).$$

D'où

$$\begin{aligned}|\log((1-r^2)f'(re^{i\alpha}))| &\leq 4\int_0^r \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\rho}+\frac{1}{1-\rho}\right) d\rho\\ &\leq 2(\log(1+r)-\log(1-r))\\ &\leq 2\log\left(\frac{1+r}{1-r}\right).\end{aligned}$$

On a donc les inégalités suivantes :

$$-2\log\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right) \leq \log((1-|z|^2)|f'(z)|) \leq 2\log\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right),$$

$$\left(\frac{1-|z|}{1+|z|}\right)^2 \leq (1-|z|^2)|f'(z)| \leq \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^2,$$

$$\frac{(1-|z|)(1-|z|)}{(1+|z|)^2(1-|z|)(1+|z|)} \leq |f'(z)| \leq \frac{(1+|z|)(1+|z|)}{(1-|z|)^2(1-|z|)(1+|z|)},$$

d'où

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}.$$

2. Soit $z \in D$.

• Montrons dans un premier temps :

$$\frac{|z|}{(1-|z|)^2} \geq |f(z)|.$$

Pour cela, nous allons raisonner de la même manière que plus haut.
On écrit pour $z = re^{i\alpha}$,

$$f(z) = \int_0^r f'(\rho e^{i\alpha}) e^{i\alpha}\, d\rho.$$

D'où

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \int_0^r |f'(\rho e^{i\alpha})|\, d\rho \quad \text{par inégalité triangulaire,} \\ &\leq \int_0^r \frac{1+x}{(1-x)^3}\, dx \quad \text{par le premier point.} \end{aligned}$$

De plus, on remarque que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{(1-r)^2}\right) &= \frac{(1-r)^2 - (-2)r(1-r)}{(1-r)^2} \\ &= \frac{1-r+2r}{(1-r)^3} \\ &= \frac{1+r}{(1-r)^3}. \end{aligned}$$

D'où

$$|f(z)| \leq \left[\frac{x}{(1-x)^2}\right]_0^r = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

• Montrons maintenant :

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)|.$$

Cette inégalité est un peu plus délicate à montrer que la précédente. Raisonnons par analyse-synthèse. Soit γ un chemin de longueur ℓ choisi de sorte que $\gamma(0) = 0$, $\gamma(\ell) = z$ et $(f \circ \gamma)\gamma'$ soit d'argument constant α sur $[0, \ell]$.
On a $\forall z \in D$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_\gamma f'(w)\, dw \\ &= \int_0^\ell f(\gamma(s))\gamma'(s)\, ds \\ &= \int_0^\ell |f(\gamma(s))\gamma'(s)| e^{i\alpha}\, ds \\ &= e^{i\alpha} \int_0^\ell |f(\gamma(s))\gamma'(s)|\, ds \quad \text{car } \alpha \text{ ne dépend pas de } s. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}|f(z)| &= \left|\int_0^\ell |f(\gamma(s))\gamma'(s)|\,ds\right| \\ &= \int_0^\ell |f(\gamma(s))\gamma'(s)|\,ds.\end{aligned}$$

Or

$$\forall s \in [0,\ell],\ f(\gamma(s))\gamma'(s) = \frac{d}{ds}(f\circ\gamma)(s).$$

On veut que $f\circ\gamma$ parcoure un segment ($f\circ\gamma$ est d'argument constant car il admet 0 comme extrémité et sa dérivée est d'argument constant), qui sera alors nécessairement le segment $[f(\gamma(0)), f(\gamma(\ell))] = [0, f(z)]$.

On distingue deux cas :

(i) Dans le cas où $|f(z)| \geq \frac{1}{4}$:
Posons

$$\begin{array}{rccc} g : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & r & \longmapsto & \frac{r}{(1+r)^2} \end{array}.$$

Soit r dans $[0,1]$. On a

$$\begin{aligned}g'(r) &= \frac{(1+r)^2 - 2r(1+r)}{(1+r)^4} \\ &= \frac{1-r}{(1+r)^3} \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Donc g est croissante sur $[0,1]$. Or $g(1) = \frac{1}{4}$ d'où :

$$f(z) \geq \frac{1}{4} \geq g(|z|) = \frac{|z|}{(1+|z|)^2}.$$

(ii) Dans le cas où $|f(z)| < \frac{1}{4}$:
On a $[0, f(z)] \subset \mathrm{Im}(f)$ d'après le théorème du quart de Koebe. Donc $f(\gamma) \subset \mathrm{Im}(f)$. On prend alors pour γ le chemin décrivant $f^{-1}([0, f(z)])$ paramétré par l'abscisse curviligne. On a donc

$$\begin{aligned}|f(z)| &= \int_0^\ell |f'(\gamma(s))||\gamma'(s)|\,ds \\ &\geq \int_0^\ell \varphi(|\gamma(s)|)|\gamma'(s)|\,ds \quad \text{d'après 1. avec} \quad \forall r \in [0,1], \quad \varphi(r) = \frac{1+r}{(1-r)^3}.\end{aligned}$$

Or en regardant soigneusement pour la dérivée en 0, on a

$$\forall s \in [0,\ell], \quad \frac{d}{ds}(|\gamma(s)|^2) = 2|\gamma(s)|\frac{d}{ds}(|\gamma(s)|),$$

mais aussi

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left(|\gamma(s)|^2\right) &= \frac{d}{ds}(\gamma\overline{\gamma}(s)) \\ &= \gamma'(s)\overline{\gamma(s)} + \overline{\gamma'(s)}\gamma(s).\end{aligned}$$

Donc

$$\forall s \in [0,\ell], \quad 2|\gamma(s)|\frac{d}{ds}(|\gamma(s)|) = \gamma'(s)\overline{\gamma(s)} + \overline{\gamma'(s)}\gamma(s).$$

Par définition de γ et par injectivité de f on a pour tout $s \in [0,\ell],\ \gamma(0) = 0$ si et seulement si $s = 0$.
Donc

$$\forall s \in]0,\ell], \quad \frac{d}{ds}(|\gamma(s)|) = \frac{1}{2}\left(\gamma'(s)\frac{\overline{\gamma(s)}}{|\gamma(s)|} + \gamma'(s)\frac{\gamma(s)}{|\gamma(s)|}\right).$$

D'où

$$\begin{aligned}\left|\frac{d}{ds}(|\gamma(s)|)\right| &\leq \frac{1}{2}(|\gamma'(s)|\frac{|\overline{\gamma(s)}|}{|\gamma(s)|} + \gamma'(s)\frac{|\gamma(s)|}{|\gamma(s)|}) \quad \text{par inégalité triangulaire,} \\ &\leq |\gamma'(s)|.\end{aligned}$$

Ainsi on a

$$|f(z)| \geq \int_0^\ell \varphi(|\gamma(s)|)|\gamma'(s)|\,ds \quad \text{et} \quad \forall s \in]0,\ell], \quad |\gamma'(s)| \geq \left|\frac{d}{ds}(|\gamma(s)|)\right|.$$

On se retrouve donc avec :

$$\begin{aligned}|f(z)| &\geq \int_0^\ell \varphi(|\gamma(s)|)\left|\frac{d}{ds}(|\gamma(s)|)\right| ds \\ &\geq \int_0^\ell \varphi(|\gamma(s)|)\frac{d}{ds}(|\gamma(s)|)\,ds \quad \text{car } \frac{d}{ds}(|\gamma(s)|) \in \mathbb{R}, \\ &\geq [g(|\gamma(s)|)]_0^\ell \quad \text{où } g \text{ est la fonction définie en (i), qui vérifie entre autres } g' = \varphi, \\ &\geq g(|z|) - g(0) \\ &\geq \frac{|z|}{(1+|z|)^2}.\end{aligned}$$

$\square$

6 Cas particulier $n = 3$

Dans cette partie, pour tout ce qui concerne les problèmes de dérivabilité, d'intégrabilité et de convergence, on se référera au livre *Univalent Fonctions* de Peter L. Duren, voir [1].

6.1 Définitions préliminaires

Pour démontrer le cas $n = 3$, nous allons commencer par introduire les *chaînes de Löwner*. Celles-ci permettent une approche efficace des problèmes extrémaux pour les fonctions holomorphes injectives.

Définition 17. *Soit f une $\mathcal{S}$-fonction.*
On appelle chaîne de Löwner associée à f la fonction $\tilde{f} : D \times [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ telle que :
- *Pour tout t dans $[0, +\infty[$, $\tilde{f}(\ . \ , t)$ est holomorphe injective sur D.*
- *Pour tout z dans D, $\tilde{f}(z, \ . \ )$ est mesurable et satisfait :*

1. *Pour tous réels s et t vérifiant $0 \leq s \leq t < +\infty$, on a $\tilde{f}(D, s) \subset \tilde{f}(D, t)$,*
2. $\forall t \in [0, +\infty[, \quad \tilde{f}(z, t) = e^t z + a_2(t)z^2 + \ldots$ *(dilatation à l'origine),*
3. $\tilde{f}(z, 0) = f(z)$.

Remarque : Il nous faut montrer que pour tout $f \in \mathcal{S}$, il existe une chaîne de Löwner associée.

Remarque : La condition 2. donne pour tout t dans $[0, +\infty[$, $\tilde{f}(0, t) = 0$ et $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}(0, t) = e^t$. On obtient ainsi une dilatation en l'origine.

Pour la suite, nous allons travailler sur un sous ensemble dense de la classe $\mathcal{S}$. On en déduira les résultats sur les $\mathcal{S}$-fonctions par densité.

Définition 18. *On appelle fonction slit une fonction holomorphe injective dont l'image est le complémentaire d'un arc de Jordan (un arc de Jordan est un chemin continu injectif).*

Remarque : Pour une fonction slit définie sur D, l'arc de Jordan doit nécessairement s'étendre vers l'infini.

Remarque : Pour f une fonction slit, nous allons voir qu'il y a unicité de la chaîne de Löwner associée à f.

6.2 Densité de l'ensemble des fonctions slits dans $\mathcal{S}$

Pour montrer que l'ensemble des fonctions slit est dense dans l'ensemble des $\mathcal{S}$-fonctions, nous allons nous servir des énoncés suivants :

Théorème 19. ***Théorème de l'application conforme.***
Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe distinct de $\mathbb{C}$. Alors il existe un biholomorphisme $h : D \longrightarrow U$, c'est-à-dire une bijection biholomorphe entre D et U. On dit que l'ouvert U est uniformisé par le disque.
De plus, on peut choisir h de sorte que $h(0) = 0$ et $h'(0) \in \mathbb{R}_+^*$. Un telle fonction h est alors unique.

Définition 20. *Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts de $\mathbb{C}$ contenant 0. Soit pour $n \in \mathbb{N}$, V_n la composante connexe de l'intérieur de $U_n \cap U_{n+1} \cap \dots$ contenant 0. On définit le noyau de la suite par l'union des V_n si celle-ci est non vide, par $\{0\}$ sinon.*
Ainsi, le noyau est soit un ouvert connexe contenant 0, ou bien le singleton $\{0\}$. On dit que le suite converge vers un noyau si toute sous-suite possède le même noyau.

Théorème 21. ***Théorème de convergence de Carathéodory.***
Soit $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de domaines simplement connexes différents de $\mathbb{C}$ avec $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \in D_n$. Soit pour $n \in \mathbb{N}$ l'application f_n conforme de D dans D_n qui satisfait $f_n(0) = 0$ et $f_n'(0) \in \mathbb{R}_+^*$. Soit E le noyau de la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f sur tout compact de D si et seulement si $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $E \neq \mathbb{C}$.
Dans le cas où il y a convergence, il y a deux possibilités. Si $E = \{0\}$, alors f est nulle. Si $E \neq \{0\}$, alors E est un domaine simplement connexe, f est un application conforme de D dans E, et la suite $(f_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f^{-1} sur tout compact de E.

Maintenant énonçons de manière plus précise ce que nous cherchons à démontrer.

Théorème 22. *Pour toute fonction $f \in \mathcal{S}$, il existe une suite de fonctions slit définies sur D $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur tout compact de D.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{S}$, K un compact de D et $\epsilon > 0$.

Observons tout d'abord que f peut être approchée uniformément sur tout compact de D par des $\mathcal{S}$-fonctions dont l'image est le domaine délimité par une courbe de Jordan. Par exemple, la suite

$$\left(\begin{array}{cccc} f_n : & D & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \frac{f\left(z\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right)}{1-\frac{1}{2^n}} \end{array} \right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

nous donnent une telle approximation. En effet pour $n \in \mathbb{N}^*$, le bord de l'image de f_n est

$$\left\{ \frac{f\left(e^{it}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right)}{1-\frac{1}{2^n}},\ t \in [0, 2\pi] \right\}.$$

On dispose alors d'une $\mathcal{S}$-fonction g dont l'image est le domaine délimité par une courbe de Jordan telle que :

$$\forall z \in K, \quad |f(z) - g(z)| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Nous allons désormais chercher à approcher g par une suite de fonctions slit. Notons C la courbe de Jordan qui délimite l'image de g. Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, Γ_n un arc de Jordan qui part de l'infini jusqu'à un point w_0 de C, puis qui parcourt C jusqu'à un point w_n (sans repasser par w_0). Notons D_n le complémentaire de Γ_n. C'est un ouvert simplement connexe distinct de $\mathbb{C}$. Le théorème de l'application conforme nous donne alors l'existence d'un biholomorphisme g_n de D dans D_n avec $g_n(0) = 0$ et $g_n'(0) \in \mathbb{R}_+^*$. Choisissons les extrémités $(w_n)_{n \in \mathbb{N}*}$ de sorte que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma_n \subset \Gamma_{n+1}$ et w_n converge vers w_0. Il est alors clair que D est le noyau de la suite $(D_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et que $(D_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers D. D'après le théorème de convergence de Carathéodory, la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge alors vers g sur tout compact de D. Par la formule de Cauchy, cela implique que $(g_n'(0))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $f'(0) = 1$. Ainsi, la suite

$$\left(\frac{g_n}{g_n'(0)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}^*}$$

est une suite de fonctions slit qui converge vers f uniformément sur tout compact de D. Donc il existe h une fonction slit telle que :

$$\forall z \in K, \quad |g(z) - h(z)| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

On a donc

$$\forall z \in K, \quad |f(z) - h(z)| \leq \epsilon,$$

ce qui prouve le théorème. □

6.3 Retour sur les chaînes de Löwner

Soit f une fonction slit sur D. On note Γ le complémentaire de $f(D)$, c'est un arc de Jordan qui s'étend à l'infini. On paramètre Γ par son abscisse curviligne, et on note $\gamma : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ la paramétrisation ainsi obtenue.

Pour que la définition des chaînes de Löwner ait un sens, commençons par montrer l'existence et l'unicité de $\tilde{f}$ (l'existence pour les fonctions slit donnera par densité l'existence pour les $\mathcal{S}$-fonctions).

On pose $\tilde{f}(\ .\ ,0) = f$. Pour $t \in]0, +\infty[$, on note $\Gamma_t = \mathbb{C} \backslash \{\gamma(u),\ u \geq t\}$. D'après le théorème de l'application conforme, puisque $\mathbb{C} \backslash \Gamma_t$ est un ouvert simplement connexe distinct de $\mathbb{C}$, on dispose d'un unique biholomorphisme $\tilde{f}(\ .\ ,t)$ de D dans Γ_t qui vérifie

$$\tilde{f}(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}(0,t) \in \mathbb{R}_+^*.$$

On notera parfois f_t pour désigner $\tilde{f}(\ .\ ,t)$.

$$\text{Montrons que} \quad F : t \longmapsto \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}(0,t) = f_t'(0) \quad \text{est croissante.}$$

Soit $s \leq t$, on sait déjà que $\tilde{f}(D,s) \subset \tilde{f}(D,t)$. On peut alors regarder : $f_t^{-1} \circ f_s : D \longrightarrow D$, qui vérifie $f_t^{-1} \circ f_s(0) = 0$. Par le lemme de Schwarz, on a alors :

$$(f_t^{-1} \circ f_s)'(0) \leq 1,$$

et

$$\begin{aligned}(f_t^{-1} \circ f_s)'(0) = 1 &\Longleftrightarrow f_t^{-1} \circ f_s \quad \text{est un automorphisme de } D \\ &\Longleftrightarrow \tilde{f}(D,s) = \tilde{f}(D,t).\end{aligned}$$

Or $\tilde{f}(D,s) \neq \tilde{f}(D,t)$ par construction. Donc

$$(f_t^{-1} \circ f_s)'(0) < 1,$$

c'est-à-dire

$$f_s'(0) < f_t'(0) \quad \text{car } f_t'(0) \in \mathbb{R}_+^*.$$

$$\text{Montrons désormais que} \quad F : t \longmapsto \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}(0,t) = f_t'(0) \quad \text{est continue.}$$

Soit $t \in [0, +\infty[$, et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs qui converge vers t. Il est clair que $\Gamma_t \neq \mathbb{C}$ est le noyau de la suite $(\Gamma_{t_n})_{n \in \mathbb{N}}$ et que $(\Gamma_{t_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers Γ_t. D'après le théorème de convergence de Carathéodory, la suite $(f_{t_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors vers

f_t uniformément sur tout compact de D. Par la formule de Cauchy, cela implique que $(f'_{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de D vers f'_t. En particulier, $(f'_{t_n}(0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f'_t(0)$. Ce qui prouve la continuité de

$$F : t \longmapsto \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}(0,t) = f'_t(0).$$

Remarque : On a aussi par la même occasion la continuité de tous les coefficients a_n.

On a que $r \longmapsto \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}(0,r)$ est continue, strictement croissante et strictement positive donc on peut la reparamétrer par l'exponentielle via un homéomorphisme. Pour cela, on procède de la manière suivante.

En remplaçant γ par $\delta = \gamma \circ \phi$, où $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est un homéomorphisme croissant, on a encore $\Gamma = \delta(\mathbb{R}_+)$. On pose pour $u \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}\Delta_u &= \delta([u,+\infty[) \\ &= \gamma([\phi(u),+\infty[) \\ &= \Gamma_{\phi(u)}\end{aligned}$$

Si on construit $\tilde{g}$ à partir de δ comme on a construit $\tilde{f}$ à partir de γ, on obtient

$$G : u \longmapsto \frac{\partial \tilde{g}}{\partial z}(0,u)$$

strictement croissante, continue, strictement positive, avec $G = F \circ \phi$. De plus g_u est l'application conforme normalisée de D sur $\mathbb{C}\backslash\Delta_u = \mathbb{C}\backslash\Gamma_{\phi(u)}$, c'est donc $f_{\phi(u)}$. D'où

$$g'_u(0) = f'_{\phi(u)}(0) \quad \text{ie. } \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}(0,\ .\ ) \text{ évaluée en } \phi(u) \text{ plutôt qu'en } u.$$

On veut $G = \exp$, c'est-à-dire $F \circ \phi = \exp$. Là où ça a un sens, on a $\phi = F^{-1} \circ \exp$. Pour que ça marche, F doit tendre vers $+\infty$ quand u tend vers $+\infty$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que F est bornée par une constante $M > 0$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite croissante qui tend ver $+\infty$. On regarde $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f_{u_n}^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$. On a

$$h_n : \mathbb{C}\backslash\Gamma_{u_n} \longrightarrow D$$

avec $\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathbb{C}\backslash\Gamma_{u_n} = \mathbb{C}$. Donc pour tout compact K, on dispose de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout n supérieur à n_0, h_n est définie sur K. Pour continuer, nous allons utiliser le théorème suivant :

Théorème 23. ***Théorème de Montel.***
Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. De toute suite bornée dans l'espace des fonctions holomorphes sur U, on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de U.

D'après le théorème de Montel, on a à extraction près la convergence de $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniformément sur tout compact vers une fonction entière h.
Or

$$h(0) = \lim_{n\to+\infty} h_n(0) = 0$$

et

$$h_n'(0) = (f_{u_n}'(0))^{-1} = F(u_n)^{-1},$$

donc

$$|h_n'(0)| = |F(u_n)|^{-1} \geq M^{-1}.$$

Par la formule de Cauchy, on a alors

$$|h'(0)| \geq M^{-1} > 0.$$

La fonction h est donc entière, bornée et non constante, ce qui contredit le théorème de Liouville.

Au final, on a bien montré l'existence et l'unicité d'une chaîne de Löwner associée à une fonction slit donnée.

6.4 Démonstration du cas $n = 3$

A présent, définissons la fonction P par l'équation suivante :

$$\forall (z,t) \in D \times [0,+\infty[, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(z,t) = z \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}(z,t) P(z,t). \qquad (DE)$$

On écrit de plus :

$$\forall (z,t) \in D \times [0,+\infty[, \quad \tilde{f}(z,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(t) z^n \quad \text{et} \quad P(z,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t) z^n. \qquad (PS)$$

On a $\forall t \in [0,+\infty[,\ a_1(t) = e^t$ et pour tout entier n, $a_n(0) = a_n$.
Commençons par montrer que $p_0(t) = 1$. En utilisant (DE) et (PS) on obtient $\forall (z,t) \in D \times [0,+\infty[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n'(t) z^n = z \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(t) n z^{n-1} P(z,t).$$

Donc $\forall (z,t) \in D \times [0,+\infty[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n'(t) z^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(t) n z^{n-1} P(z,t).$$

En évaluant en $z = 0$, on a $\forall t \in [0,+\infty[,\ a_1'(t) = a_1(t) P(0,t)$. Or $\forall t \in [0,+\infty[,\ a_1(t) = e^t$, d'où $\forall t \in [0,+\infty[,\ P(0,t) = p_0(t) = 1$.

Dans ce qui suit, nous allons utiliser sans démonstration le résultat suivant du livre *Univalent Functions* écrit par Peter L. Duren, voir [1] (p.88) :

$$\forall (z,t) \in D \times [0,+\infty[, \quad P(z,t) = \frac{1+\kappa(t) z}{1-\kappa(t) z},$$

où κ est une fonction continue de module 1. Ce résultat permet de démontrer l'inégalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,+\infty[, \quad |p_n(t)| \leq 2.$$

Montrons que $\mathrm{Re}(P) > 0$.
Posons pour $(z,t) \in D \times [0,+\infty[$, $w_{(z,t)} = \kappa(t) z$, on a donc $|w_{(z,t)}| < 1$. Ainsi

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1+w_{(z,t)}}{1-w_{(z,t)}}\right) = \frac{1-|w_{(z,t)}|^2}{|1-w_{(z,t)}|^2} > 0.$$

Montrons désormais que les fonctions a_n, pour $n \in \mathbb{N}$ sont déterminées par les fonctions p_k, pour $k \in \mathbb{N}$.
Pour tout (z,t) dans $D \times [0,+\infty[$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} a_n'(t) z^n &= z \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(t) n z^{n-1} P(z,t) \\
&= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(t) n z^n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t) z^n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} k a_k(t) z^k \times p_{n-k}(t) z^{n-k} \quad \text{(produit de Cauchy)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} k a_k(t) p_{n-k}(t) z^n
\end{aligned}$$

Par identification des coefficients, on a pour tout réel positif t et pour tout entier non nul n,

$$\begin{aligned}
a_n'(t) &= \sum_{k=1}^{n} k a_k(t) p_{n-k}(t) \\
&= n a_n(t) + \sum_{k=1}^{n-1} k a_k(t) p_{n-k}(t) \quad \text{car} \quad \forall t > 0, \quad p_0(t) = 1.
\end{aligned}$$

On se retrouve donc avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}*, \quad \forall t \in [0,+\infty[, \quad a_n'(t) e^{-nt} = e^{-nt}\left(n a_n(t) + \sum_{k=1}^{n-1} k a_k(t) p_{n-k}(t)\right).$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}*, \quad \forall t \in [0,+\infty[, \quad e^{-nt}(a_n'(t) - n a_n(t)) = \sum_{k=1}^{n-1} k a_k(t) p_{n-k}(t) e^{-nt}.$$

Avant de continuer, démontrons le lemme suivant :

Lemme 24. *Pour tout $\mathcal{S}$-fonction f et pour tout $n \geq 2$,*

$$|a_n| \leq \frac{(n+1)^2 e^2}{4}.$$

Démonstration. Soit $f : z \longmapsto z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n z^n \ \in \mathcal{S}$.
D'après le théorème de distorsion on a pour tout $z \in D$, $|f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$.
Soit $z \in D$, et $r < 1$ tel que $|z| < r$.
Regardons la fonction $\varphi : x \longmapsto \frac{x}{(1-x)^2}$ sur $[-r, r]$. On a

$$\forall x \in [-r, r], \quad \varphi'(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3} > 0.$$

Donc φ est une fonction croissante. Ainsi, on se retrouve avec l'inégalité suivante :

$$|f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}.$$

On a donc par l'inégalité de Cauchy

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2, \quad |a_n| &\leq \frac{1}{r^n} \times \frac{r}{(1-r)^2} \\ &\leq \frac{1}{(1-r)^2 r^{n-1}}. \end{aligned}$$

Soit $n \geq 2$. Etudions la fonction $\psi_n : s \longmapsto \frac{1}{(1-s)^2 s^{n-1}}$ sur]0,1[. Celle-ci est dérivable sur]0,1[et on a $\forall s \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} \psi_n'(s) &= -\frac{(1-s)^2(n-1)s^{n-2} + (-2)(1-s)s^{n-1}}{(1-s)^4 s^{2n-2}} \\ &= \frac{-(1-s)(n-1) + 2s}{(1-s)^3 s^n} \\ &= \frac{(n+1)s - (n-1)}{(1-s)^3 s^n}. \end{aligned}$$

Or $\quad \forall s \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} \psi_n'(s) > 0 &\Longleftrightarrow (n+1)s - (n-1) > 0 \\ &\Longleftrightarrow s > \frac{n-1}{n+1}. \end{aligned}$$

Donc ψ_n atteint son minimum sur]0,1[en $\frac{n-1}{n+1}$. D'où

$$\begin{aligned}
|a_n| &\leq \psi_n\left(\frac{n-1}{n+1}\right) \\
&\leq \frac{1}{\left(\frac{n+1-(n-1)}{n+1}\right)^2\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1}} \\
&\leq \frac{(n+1)^2}{4}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n-1} \\
&\leq \frac{(n+1)^2}{4}\left(1+\frac{n+1-(n-1)}{n-1}\right)^{n-1} \\
&\leq \frac{(n+1)^2}{4}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

Or la suite $\left(\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n-1}\right)_{n\geq 2}$ est croissante et a pour limite e^2. On a donc

$$\forall n \geq 2, \quad \left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n-1} \leq e^2.$$

Par conséquent,

$$\forall n \geq 2, \quad |a_n| \leq \frac{(n+1)^2}{4}e^2.$$

□

Le lemme qui vient d'être montré, et l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,+\infty[, \quad |p_n(t)| \leq 2.$$

nous assurent que les intégrales ci-dessous convergent. On a $\forall n \in \mathbb{N}*, \quad \forall t \in [0,+\infty[$,

$$\begin{aligned}
\int_t^{+\infty} e^{-ns}(a_n'(s) - na_n(s))\,ds &= \int_t^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} ka_k(s)p_{n-k}(s)e^{-ns}\right) ds \\
\left[e^{-ns}a_n(s)\right]_t^{+\infty} &= \int_t^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} ka_k(s)p_{n-k}(s)e^{-ns}\right) ds \\
e^{-nt}a_n(t) &= -\int_t^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} ka_k(s)p_{n-k}(s)e^{-ns}\right) ds
\end{aligned}$$

Cette dernière formule nous montre les $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont entièrement déterminés par les $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$. A présent, utilisons ce résultat.
Regardons, en premier lieu pour $n = 2$:

$$\forall t \in [0,+\infty[, \quad e^{-2t}a_2(t) = -\int_t^{+\infty} a_1(s)p_1(s)e^{-2s}ds = -\int_t^{+\infty} p_1(s)e^{-s}\,ds.$$

On fait tendre t vers zéro :

$$a_2 = -\int_0^{+\infty} p_1(s)e^{-s}\,ds.$$

Puisque pour tout $t \geq 0$, $|p_1(t)| \leq 2$, on a $|a_2| \leq 2$. On retrouve donc le théorème de Bieberbach.

Appliquons maintenant cette formule au cas $n = 3$. Après avoir fait tendre t vers 0, on obtient :

$$\begin{aligned} a_3 &= -\int_0^{+\infty} \left[e^t p_2(t) + 2a_2(t)p_1(t)\right] e^{-3t}\,dt \\ &= -\int_0^{+\infty} p_2(t)e^{-2t}\,dt - \int_0^{+\infty} 2a_2(t)p_1(t)e^{-3t}\,dt. \end{aligned}$$

Effectuons une intégration par partie sur la deuxième intégrale :

$$\begin{aligned} -\int_0^{+\infty} 2a_2(t)p_1(t)e^{-3t}\,dt &= -\int_0^{+\infty} 2a_2(t)e^{-2t}p_1(t)e^{-t}\,dt \\ &= -\left[2a_2(t)e^{-2t}\int_0^t p_1(s)e^{-s}\,ds\right]_0^{+\infty} \\ &\quad + \int_0^{+\infty} 2\left(\int_0^t p_1(s)e^{-s}\,ds\right)\frac{d}{dt}\left(a_2(t)e^{-2t}\right)\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} 2\left(\int_0^t p_1(s)e^{-s}\,ds\right)\left(p_1(t)e^{-t}\right)\,dt \\ &= \left[\left(\int_0^t p_1(s)e^{-s}\,ds\right)^2\right]_0^{+\infty} \\ &= \left(\int_0^{+\infty} p_1(s)e^{-s}\,ds\right)^2. \end{aligned}$$

On a donc

$$a_3 = -\int_0^{+\infty} p_2(t)e^{-2t}\,dt + \left(\int_0^{+\infty} p_1(t)e^{-t}\,dt\right)^2.$$

Pour continuer on va supposer que le coefficient a_3 est réel et positif car si ce n'est pas le cas, on peut s'y ramener par conjugaison d'une rotation d'angle la moitié de l'argument de a_3 (qu'on notera α) :

$$e^{-i\alpha}f(e^{i\alpha}z) = z + e^{-i\alpha}a_2z^2 + e^{-2i\alpha}a_3z^3 + \dots$$

Avant de continuer le calcul, établissons une relation entre $t \longmapsto \mathrm{Re}(p_1(t))$ et $t \longmapsto \mathrm{Re}(p_2(t))$.

Posons tout d'abord

$$\Psi : (z,t) \longmapsto \frac{1}{z}\frac{P(z,t)-1}{P(z,t)+1}.$$

Remarquons que pour tout t réel positif, $\Psi(\ .\ ,t)$ possède une singularité effaçable en 0. On a pour z au voisinage de 0 et t dans $[0,+\infty[$:

$$\begin{aligned}\Psi(z,t) &= \frac{1}{P(z,t)+1}\frac{P(z,t)-1}{z}\\ &= \frac{1}{P(z,t)+1}(p_1(t)+p_2(t)z+p_3(t)z^2+o(z^2)).\end{aligned}$$

On a donc

$$\forall t \in [0,+\infty[, \quad \Psi(0,t) = \frac{p_1(t)}{2}.$$

De plus pour tout z au voisinage de 0 et t dans $[0,+\infty[$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial z}(z,t) &= -\frac{1}{z^2}\frac{P(z,t)-1}{P(z,t)+1} + \frac{1}{z}\frac{\frac{\partial P}{\partial z}(z,t)(P(z,t)+1)-(P(z,t)-1)\frac{\partial P}{\partial z}(z,t)}{(P(z,t)+1)^2}\\ &= -\frac{1}{z^2}\frac{P^2(z,t)-1}{(P(z,t)+1)^2} + \frac{z}{z^2}\frac{2\frac{\partial P}{\partial z}(z,t)}{(P(z,t)+1)^2}\\ &= \frac{1}{z^2}\frac{2z\frac{\partial P}{\partial z}(z,t)-P^2(z,t)+1}{(P(z,t)+1)^2}.\end{aligned}$$

Puisque z est au voisinage de 0, on effectue le développement limité suivant :

$$\begin{aligned}2z\frac{\partial P}{\partial z}(z,t)-P^2(z,t)+1 =& 2z(p_1(t)+2p_2(t)z+3p_3(t)z^2+o(z^2))+1\\ &-(1+p_1(t)z+p_2(t)z^2+o(z^2))^2\\ =& 2p_1(t)z+4p_2(t)z^2+6p_3(t)z^3+o(z^3))+1\\ &-(1+2p_1(t)z+2p_2(t)z^2+p_1^2(t)z^2+o(z^2))\\ =&(2p_2(t)-p_1^2(t))z^2+o(z^2).\end{aligned}$$

D'où

$$\forall t \in [0,+\infty[, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z}(0,t) = \frac{1}{2}p_2(t) - \frac{1}{4}p_1^2(t).$$

Par conséquent pour tout z au voisinage de 0 et t dans $[0,+\infty[$,

$$\Psi(z,t) = \frac{p_1(t)}{2} + \left(\frac{1}{2}p_2(t)-\frac{1}{4}p_1^2(t)\right)z + o(z).$$

Montrons désormais que pour tout t réel positif, $\Psi(\ .\ ,t)$ va de D dans D ; on pourra ainsi appliquer le lemme de Schwarz. Soit $t \in [0,+\infty[$. On a pour tout $z \in D$, $\mathrm{Re}(P(z,t)) > 0$. Or pour tout $w \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(w) > 0$, en notant $x = \mathrm{Re}(w)$ et

$y = \mathrm{Im}(w)$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\frac{w-1}{w+1}\right|^2 &= \frac{(x-1)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2}\\ &= 1-\frac{4x}{(x+1)^2+y^2}\\ &\leq 1\end{aligned}$$

Donc

$$\forall z \in D\backslash\{0\}, \quad |\Psi(z,t)| \leq \frac{1}{|z|}.$$

Soit $r \in]0,1[$. Notons $D_r = \{z \in \mathbb{C} \big| |z| < r\}$ et appliquons le principe du maximum :

$$\sup_{D_r} |\Psi(\ .\ ,t)| = \sup_{\partial D_r} |\Psi(\ .\ ,t)| \leq \frac{1}{r}.$$

En faisant tendre r vers 1, on obtient $\sup\limits_{D} |\Psi(\ .\ ,t)| \leq 1$. Par le théorème de l'image ouverte, puisque $\Psi(\ .\ ,t)$ est non constante, on a que $\Psi(\ .\ ,t)$ est une application ouverte. On en conclut que $\forall z \in D$, $|\Psi(z,t)| < 1$.

On note φ_t l'automorphisme de D défini par

$$\forall z \in D, \quad \varphi_t(z) = \frac{z-a_t}{1-\overline{a_t}z} \quad \text{où } a_t = \Psi(0,t).$$

Alors la fonction $\varphi_t \circ \Psi(\ .\ ,t)$ va de D dans D et vérifie $\varphi_t(\Psi(0,t)) = 0$.
Par le lemme de Schwarz, on a donc

$$\left|\frac{\partial \varphi_t \circ \Psi(\ .\ ,t)}{\partial z}(0)\right| \leq 1.$$

D'où

$$\left|\frac{\partial \Psi}{\partial z}(0,t)\varphi_t'(a_t)\right| \leq 1.$$

Or

$$\forall z \in D, \quad \varphi_t'(z) = \frac{1-\overline{a_t}z - \overline{a_t}(z-a_t)}{(1-\overline{a_t}z)^2},$$

donc

$$\varphi_t'(a_t) = \frac{1}{1-|a_t|^2}.$$

Et on a montré précédemment que

$$\Psi(0,t) = \frac{p_1(t)}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z}(0,t) = \frac{1}{2}p_2(t) - \frac{1}{4}p_1^2(t).$$

Ainsi

$$\left|\frac{1}{1-\left|\frac{p_1(t)}{2}\right|^2}\left(\frac{1}{2}p_2(t)-\frac{1}{4}p_1^2(t)\right)\right|\leq 1.$$

On a alors

$$\left|\frac{1}{2}p_2(t)-\frac{1}{4}p_1^2(t)\right|\leq 1-\frac{1}{4}\left|p_1(t)\right|^2.$$

D'où

$$\left|\frac{1}{2}\left(\mathrm{Re}(p_2(t))+i\mathrm{Im}(p_2(t))\right)-\frac{1}{4}\mathrm{Re}(p_1(t))^2-\frac{1}{2}i\mathrm{Re}(p_1(t))\mathrm{Im}(p_1(t))+\frac{1}{4}\mathrm{Im}(p_1(t))^2\right|\leq$$
$$1-\frac{1}{4}\left(\mathrm{Re}(p_1(t))^2+\mathrm{Im}(p_1(t))^2\right).$$

Puisque $\forall z\in\mathbb{C}$, $-\mathrm{Re}(z)\leq|z|$, on a :

$$\begin{aligned}-\left(\frac{1}{2}\mathrm{Re}(p_2(t))-\frac{1}{4}\mathrm{Re}(p_2(t))^2+\frac{1}{4}\mathrm{Im}(p_1(t))^2\right)&\leq 1-\frac{1}{4}\mathrm{Re}(p_1(t))^2-\frac{1}{4}\mathrm{Im}(p_1(t))^2,\\ \text{donc}\quad -\frac{1}{2}\mathrm{Re}(p_2(t))&\leq 1-\frac{1}{2}\mathrm{Re}(p_1(t))^2,\\ \text{d'où}\quad \mathrm{Re}(p_1(t))^2&\leq 2+\mathrm{Re}(p_2(t)). \qquad (*)\end{aligned}$$

Revenons à notre réel positif a_3 :

$$|a_3|=\mathrm{Re}(a_3)=\mathrm{Re}\left(-\int_0^{+\infty}p_2(t)e^{-2t}\,dt+\left(\int_0^{+\infty}p_1(t)e^{-t}\,dt\right)^2\right).$$

Or pour tout z dans $\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z^2)=\mathrm{Re}(z)^2-\mathrm{Im}(z)^2\leq\mathrm{Re}(z)^2$. D'où

$$|a_3|\leq-\int_0^{+\infty}\mathrm{Re}(p_2(t))e^{-2t}\,dt+\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{Re}(p_1(t))e^{-t}\,dt\right)^2.$$

Par l'inégalité $(*)$, on a :

$$\begin{aligned}|a_3|&\leq\int_0^{+\infty}\left(2-\mathrm{Re}(p_1(t))^2\right)e^{-2t}\,dt+\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{Re}(p_1(t))e^{-t}\,dt\right)^2\\&\leq 1-\int_0^{+\infty}\mathrm{Re}(p_1(t))^2e^{-2t}\,dt+\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{Re}(p_1(t))e^{-t}\,dt\right)^2.\end{aligned}$$

Or par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{Re}(p_1(t))e^{-t/2}e^{-t/2}\,dt\right)^2\leq\int_0^{+\infty}\mathrm{Re}(p_1(t))^2e^{-t}\,dt\underbrace{\int_0^{+\infty}e^{-t}\,dt}_{=1}.$$

D'où
$$|a_3| \leq 1 + \int_0^{+\infty} \mathrm{Re}(p_1(t))^2 (e^{-t} - e^{-2t})\, dt.$$
Or pour tout $t \geq 0$, $|p_1(t)| \leq 2$, donc $|\mathrm{Re}(p_1(t))| \leq 2$. Ainsi,
$$\begin{aligned}
|a_3| &\leq 1 + \int_0^{+\infty} 4(e^{-t} - e^{-2t})\, dt \\
&\leq 1 + 4\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt - 2\int_0^{+\infty} 2e^{-2t}\, dt \\
&\leq 1 + 4 - 2 \\
&\leq 3.
\end{aligned}$$

Nous venons alors de montrer le résultat pour les fonctions slit. Par densité de ces fonctions dans $\mathcal{S}$, nous avons le résultat final.

Conclusion

Se servir des chaînes de Löwner comme on l'a fait au cours de la dernière partie semble constitue une méthode générale pour s'attaquer à la conjecture de Bierberbach. Comme on l'a montré plus haut, on peut trouver une expression explicite des coefficient a_n qui ne dépend que des p_k. C'est ce qui a permis à Löwner de démontrer le cas $n = 3$. Cependant, le principal défaut de cette méthode réside dans le fait qu'elle fait intervenir des intégrales multiples et qu'elle devient très difficile à exploiter lorsque n devient grand. Pour démontrer les cas $n = 4, 5, 6$ de la conjecture de Bieberbach, d'autres méthodes ont été développées. C'est seulement plus tard, en 1973, que Nehari a réussi à prouver le cas $n = 4$ à l'aide des chaînes de Löwner.

Remerciements

Nous tenons à remercier notre encadrant Hugues Auvray pour nous avoir guidés et accompagnés tout au long de notre TER. Les conseils qu'il nous a prodigués et les corrections qu'il a pu apporter à notre mémoire nous ont été d'une grande aide et nous ont permis d'approfondir nos compétences en matière de rédaction de documents scientifiques.

Références

[1] Peter L. Duren. *Univalent functions*, volume 259 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, 1983.

[2] Albert Baernstein, II. Bieberbach's conjecture for tourists. In *Harmonic analysis (Minneapolis, Minn., 1981)*, volume 908 of *Lecture Notes in Math.*, pages 48–73. Springer, Berlin-New York, 1982.

[3] L. Bieberbach. Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln. *Berl. Ber.*, 1916 :940–955, 1916.

[4] Louis de Branges. A proof of the Bieberbach conjecture. *Acta Math.*, 154(1-2) :137–152, 1985.

[5] Peter L. Duren. Coefficients of univalent functions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83(5) :891–911, 1977.

[6] Christian Pommerenke. *Univalent functions*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975. With a chapter on quadratic differentials by Gerd Jensen, Studia Mathematica/Mathematische Lehrbücher, Band XXV.

[7] Ch. Pommerenke. The Bieberbach conjecture. *Math. Intelligencer*, 7(2) :23–25, 32, 1985.

[8] Paul Zorn. The Bieberbach conjecture. *Math. Mag.*, 59(3) :131–148, 1986.