Introduction à la conjecture de Bieberbach

Jiandi Zou (avec l'aide de M.Césaire)

12 juin 2017

Table des matières

1 Introduction

La conjecture de Bieberbach est un problème très connu dans le domaine de l'analyse complexe. C'est un problème facile pour décrire mais très difficile pour démontrer. Il s'énonce comme suit :

Conjecture de Bieberbach :

Soit $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ *une fonction holomorphe injective definie sur le disque unité* D *avec* $f(0) = 0$ *et* $f'(0) = 1$*. Alors* $|a_n| \leq n$ *pour tout* $n \geq 2$*. Si pour un certain* n*,* $|a_n| = n$*, alors* f *est une rotation de la fonction de Koebe*[1]*.*

Ce théorème a été conjecturé par Ludwig Bieberbach en 1916 comme une généralisation du même théorème pour le cas $n = 2$. C'était Louis de Branges qui donné une preuve complete en 1984 il y a 68 ans. À part le travail de Louis de Branges, il y avait beaucoup de resultats partiels donnés par les autres mathématiciens avant 1984. Pour une brève introduction, on suit la référence [1].

Dans cette mémoire, on va donner la preuve de cette conjecture pour le cas $n = 2$ avec quelques corollaires importants. Après, on va fournir la preuve de cette conjecture dans le cas où $n = 3$, qui a été établie par Charles Loewner en 1923.

2 La déscription et l'explication de la conjecture de Bieberbach

Dans cette section, on va donner la déscription et l'explication de la conjecture de Bieberbach. Elle s'agit d'une certaine famille de fonctions holomorphes qui est définie comme suit :

Définition 2.1. *La classe normalisée schlicht, dénotée* $\mathcal{S}$*, est la famille de fonctions holomorphes injectives* $f : D = \{z||z| < 1\} \to \mathbb{C}$ *où :*

1. $f(0) = 0$ *;*
2. $f'(0) = 1$*.*

Pour un exemple spécifique, on considère $k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}$ la fonction de Koebe. Tout d'abord, on a $k(0) = 0$ et $k'(0) = 1$. Si de plus on considère les fonctions suivantes :

$$s(z) = \frac{1+z}{1-z}; \quad t(s) = s^2; \quad w(t) = \frac{1}{4}(t-1);$$

Alors par un calcul direct, $k(z) = w \circ t \circ s(z)$. Comme s, t, w sont holomorphes injectives sur D, $\{z|\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$, $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ respectivement, alors k est une fonction holomorphe injective. Alors on a vraiment que $k \in \mathcal{S}$.

1. Pour la fonction de Koebe, on va l'expliquer dans la section 2.

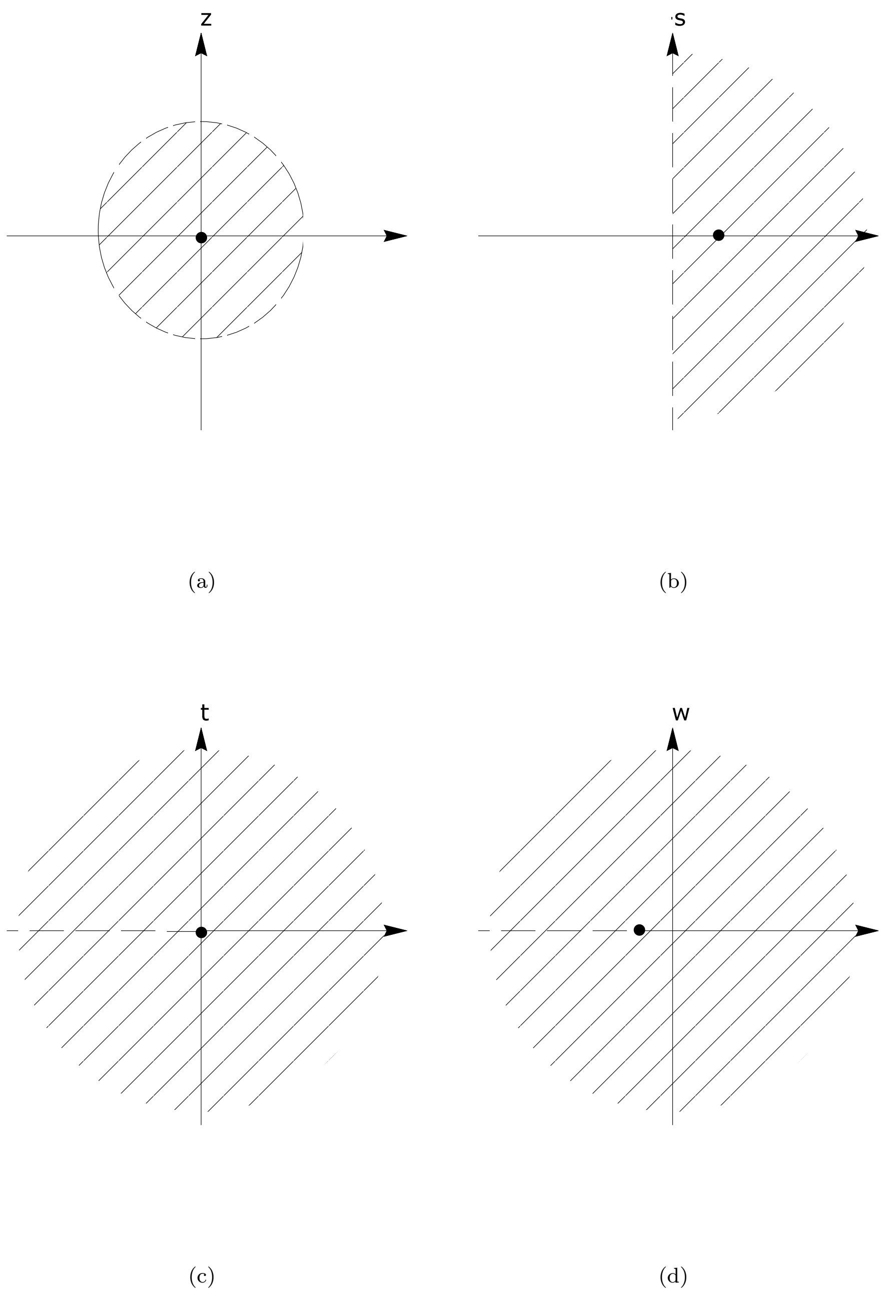


FIGURE 1 – fonction de Koebe

Maintenant on peut donner la déscription de la conjecture de Bieberbach avec les définitions ci-dessus :

Théorème 2.2. *(Conjecture de Bieberbach, De Branges(1984)) Si* $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ *est dans* $\mathcal{S}$. *Alors* $|a_n| \leq n$ *pour tout* $n \geq 2$. *Si* $|a_n| = n$ *pour un certain* n, *alors* f *est une rotation de la fonction de Koebe, i.e.* $f(z) = e^{-i\alpha} k(e^{i\alpha} z)$ *pour un certain* α *réel.*

Par la définition de la fonction de Koebe, on sait que $e^{-i\alpha}k(e^{i\alpha}z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} ne^{(n-1)i\alpha}z^n$. Alors comme $|ne^{(n-1)i\alpha}| = n$, toutes les égalités ont lieu dans ce cas. De plus le Théorème 2.2. dit que toute la fonction dans $\mathcal{S}$ satisfait les inégalités strictes sauf la fonction de Koebe $k(z)$ et ses rotations $e^{-i\alpha}k(e^{i\alpha}z)$. Autrement dit, la famille $\mathcal{S}$ est majorée par k.

Dans ce point de vue, il y a deux explications du Théorème 2.2. qui expliquent pourquoi c'est la fonction de Koebe qui atteint l'égalité. D'abord, si l'on considère l'image de fonction de Koebe, on sait que c'est presque le plan complexe entier privé d'une demi-droite. Alors dans un certain sens, sa image est le plus grand dans la famille $\mathcal{S}$. De plus, on va prouver le théorème du quart de Koebe dans la section 3(*cf.* Théorème 3.7.). Il dit qu'un disque centré à l'origine et de rayon $\frac{1}{4}$ est toujours contenu dans l'image d'une $f \in \mathcal{S}$. Pour $e^{-i\alpha}k(e^{i\alpha}z)$, le rayon $\frac{1}{4}$ est aussi le plus grand ! Alors on peut comprendre que ce n'est pas coincïdence que toutes les inégalités ont lieu dans le cas de la fonction de Koebe.

3 Preuve du cas $n = 2$ de la conjecture de Bieberbach et corollaires importants

Dans cette section, on donne d'abord une preuve du Théorème 2.2 du cas $n = 2$ dans la sous-section 3.1. Après dans la sous-section 3.2, on donne le théorème du quart de Koebe et le théorème de distorsion. Finalement par le théorème de distorsion, on obtinet une majoration de $|a_n|$ pour tout $n \geq 3$. On suivre l'article de Paul Zorn (*cf.* [6]).

3.1 Théorème de l'Aire et preuve du cas $n = 2$ de la conjecture de Bieberbach

D'une idée de prouver du Théorème 2.2. du cas $n = 2$ est ci-dessous. D'abord, on énonce le théorème de l'aire prouvé par T.H. Gronwall. Il s'agit d'une inégalité dans une nouvelle classe de fonctions holomorphes injectives. Après on considère la relation de cette classe et $\mathcal{S}$. Avec le théorème de l'aire, on obtient la conjecture de Bieberbach (cas $n = 2$).

En précision de futures applications, on énonce le théorème de Jordan (*cf.* [4]) et le théorème de Green (*cf.* [3]) sans preuve :

Théorème 3.1. *(Théorème de Jordan) Soit γ une courbe de Jordan, i.e. l'image d'une application φ, continue et injective du cercle vers le plan $\mathbb{R}^2$. Alors le complémentaire de γ est formé d'exactement deux composantes connexes distinctes, dont l'une est borne et simplement connexe, appelé l'intérieur de γ, et l'autre non, appelé l'extérieur de γ.*

Théorème 3.2. *(Théorème de Green) Soient D' un domaine compact du plan avec l'orientation définie par 2-forme $dx \wedge dy$, $\partial D'$ la bord de D'. On suppose que $\partial D'$ est une courbe plane simple, C^1 par morceaux*[2]*, avec orientation induite par l'orientation de D'. Soit ω une 1-forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$, alors :*

$$\int_{\partial D'} \omega = \iint_{D'} d\omega$$

où $\int_{\partial D'}$ est l'intégration en $\partial D'$, $\iint_{D'}$ est l'intégration en D', avec les orientations données.

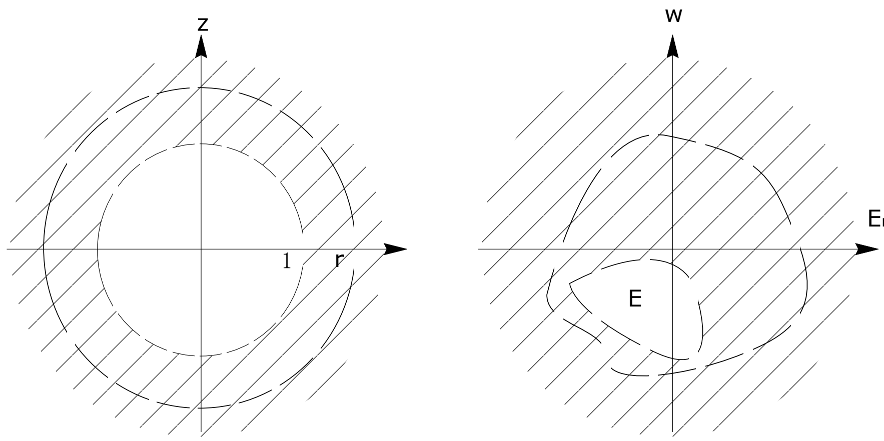
Maintenant on considère une nouvelle classe Σ de fonctions holomorphes :

Définition 3.3. *On note Σ la classe des fonctions g injectives et holomorphes définies sur $\Delta = \{z||z| > 1\}$, de série de Laurent : $g(z) = z + b_0 + b_1/z + ... = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$.*

2. $\partial D'$ est C^1 par morceaux, c'est-à-dire que $\partial D'$ est l'union des courbes qui sont différentiables avec les dérivées continues.

Pour $g \in \Sigma$, on note $E = \mathbb{C} - g(\Delta)$ et $E(r) = \mathbb{C} - \{g(z)||z| > r\}$ avec $r > 1$. Si l'on note $\gamma_r(\theta) = g(re^{2\pi i\theta})$, $\theta \in [0, 1]$, alors γ_r est une courbe de Jordan. Par le Théorème 3.1., il sépare le plan en deux composantes connexes, qui sont clairement $\{g(z)||z| > r\}$ et $E(r)$. Puisque $g(\infty) = \infty$, $E(r)$ est la composante bornée. Par définition, on a $E = \bigcap_{r>1} E(r)$. Et on a $E(r_1) \subseteq E(r_2)$, si $r_1 \leq r_2$. Alors :

$$\text{aire}E = \lim_{r\to 1^+} \text{aire}E(r).$$



(a) (b)

FIGURE 2 – fonction classe Σ

On a le résultat suivant sur les coefficients de Laurant des fonctions $g \in \Sigma$:

Théorème 3.4. *(Théorème de l'Aire) Si $g \in \Sigma$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$.*

Démonstration. On fait le changement de variables $g(z) = w = u + vi$ [3], alors :

$$\frac{1}{\pi}\text{aire}E(r) = \frac{1}{\pi}\iint_{E(r)} du \wedge dv = \frac{1}{2\pi i}\iint_{E(r)} d\overline{w} \wedge dw$$

parce que $d\overline{w} \wedge dw = (du - idv) \wedge (du + idv) = 2idu \wedge dv$. Puisque $\gamma_r = \partial E(r)$ une courbe de Jordan, par le Théorème 3.2 :

$$\frac{1}{\pi}\text{aire}E(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r)} \overline{w}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(r)} \overline{g(z)}g'(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} ire^{it}g'(re^{it})\overline{g(re^{it})}dt$$

avec changement de variable $w = g(z)$ et $z = re^{it}$.
Avec $g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$, on a :

$$\frac{1}{\pi}\text{aire}E(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(re^{it} - \sum_{n=1}^{\infty} nb_n r^{-n}e^{-int}\right)\left(re^{-it} + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{b_n}r^{-n}e^{int}\right)dt = r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} r^{-2n}n|b_n|^2$$

3. Puisque $g(z)$ est injective, $w = g(z)$ est une bijection de $|z| = r$ à $\gamma(r)$.

Puisque aire$E(r) \geq 0$, on a :

$$\sum_{n=1}^{m} r^{-2n} n|b_n|^2 \leq r^2$$

pour tout $m > 0$. En faisant $r \to 1^+$, on a :

$$\sum_{n=1}^{m} n|b_n|^2 \leq 1, \qquad m = 1, 2, ...$$

En faisant $m \to +\infty$, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1.$$

$\square$

En particulier, on a le corollaire suivant. On va l'appliquer pour prouver le Théorème 2.2. du cas $n = 2$.

Corollaire 3.5. *Si $g \in \Sigma$, alors $|b_1| \leq 1$. De plus $|b_1| = 1$ si et seulement si $g(z) = z + b_0 + e^{i\alpha}/z$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Par le Théorème 3.4., $|b_1| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$. Si $|b_1| = 1$, alors $|b_n| = 0, n = 2, 3, ...$ Alors $g(z) = z + b_0 + e^{i\alpha}/z$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\square$

Pour prouver le Théorème 2.2. (cas $n = 2$), on relie les classe de Σ et $\mathcal{S}$. On a besoin du lemme classque qui l'on énonce (*cf.* [4]) :

Lemme 3.6. *Soit u une fonction holomorphe ne s'annulant pas définie sur un domaine Ω simplement connexe, $z_0 \in \Omega$, alors il existe une fonction holomorphe v définie sur Ω par la formule intégrale $\int_\gamma \frac{u'(\zeta)}{u(\zeta)} d\zeta + c_0$ vérifiant $u(z) = e^{v(z)}$, où γ est une (arbitraire) courbe dans Ω de z_0 à z et c_0 est un nombre complexe tel que $e^{c_0} = u(z_0)$.*

Finalement on peut finir la preuve du Théorème 2.2. (cas $n = 2$). Pour $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ dans $\mathcal{S}$, nous définissons :

$$u(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{2n-2}.$$

C'est une fonction holomorphe définie sur D qui vérifie $z^2 u(z) = f(z^2)$. Puisque $f(z)$ est injective, $z = 0$ est le seul zéro (de degré 1) de f, donc u ne s'annule pas. Par le Lemme 3.6., on a une v holomorphe telle que $u(z) = e^{v(z)}$ avec $z_0 = 0$ et $c_0 = 0$. On note $g(z) = ze^{\frac{1}{2}v(z)}$. Alors g est une fonction holomorphe définie sur D avec $g(z)^2 = f(z^2)$.

On va prouver que $g(z)$ est injective. Si $z_1, z_2 \in D$ sont tels que $g(z_1) = g(z_2)$, alors $f(z_1^2) = f(z_2^2)$. Puisque f est injective, $z_1^2 = z_2^2$. Si $z_1 = -z_2$, on suppose que γ est une courbe dans D de 0 à z_1, alors $-\gamma$ est une courbe dans D de 0 à z_2. Par le Lemme 3.6.,

$$v(z_1) = \int_\gamma \frac{u'(z)}{u(z)} dz = \int_{-\gamma} \frac{u'(-z)}{u(-z)} d(-z) = \int_{-\gamma} \frac{u'(z)}{u(z)} dz = v(z_2)$$

car $u(z) = u(-z), u'(z) = -u'(-z)$. Si $z_1 = z_2$, on a aussi $v(z_1) = v(z_2)$. Puisque $g(z_1) = g(z_2)$, on a $z_1 e^{\frac{1}{2}v(z_1)} = z_2 e^{\frac{1}{2}v(z_2)}$, alors $z_1 = z_2$ car $e^{\frac{1}{2}v(z_1)} = e^{\frac{1}{2}v(z_2)} \neq 0$. Alors $g(z)$ est injective.

En comparant les coéfficients dans l'égalité $g(z)^2 = f(z^2)$, on a :

$$g(z) = z + \frac{1}{2}a_2 z^3 + ...$$

On considère $h(z) = 1/g(1/z)$. C'est une fonction méromorphe définie sur Δ et :

$$h(z) = 1/(\frac{1}{z} + \frac{a_2}{2z^3} + ...) = z - \frac{a_2}{2z} + ...$$

Si $h(w_1) = h(w_2)$ avec $w_1, w_2 \in \Delta$, alors $g(1/w_1) = g(1/w_2)$. Puisque g est injective, on a $1/w_1 = 1/w_2$, i.e. $w_1 = w_2$. En conclusion, h est injective, *i.e.* $h \in \Sigma$. Par le Corollaire 3.5., on a $|a_2| \leq 2$.

Si l'égalité a lieu, $h(z) = z + b/z$ pour $|b| = 1$. Or $h(z) = z + b/z$ si et seulement si $f(z) = z/(1 + bz)^2$. Dans ce cas f est une rotation de la fonction de Koebe.

Remarque : Dans la preuve ci-dessus, si l'on considère $\widetilde{h}(z) = 1/f(1/z)$, on peut prouver que $\widetilde{h} \in \Sigma$. On a de plus :

$$\widetilde{h}(z) = 1/(\frac{1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3}...) = z - a_2 + \frac{(a_2^2 - a_3)}{z} + ...$$

Par le Corollaire 3.5., on en déduit :

$$|a_2^2 - a_3| \leq 1.$$

Ceci explique l'utilisation de h pour obtenir la borne $|a_2| \leq 2$. Cette borne peut alors être utilisé pour donner une borne sur a_3 (non optimale) :

$$|a_3| \leq |a_2^2 - a_3| + |a_2^2| \leq 5.$$

3.2 Théorème du quart de Koebe, Théorème de distorsion et une borne sur les $|a_n|$, $n \geq 3$

À présent on considère quelques corollaires du Théorème 2.2.

Théorème 3.7. *(Théorème du quart de Koebe) Soient $f = z + a_2 z^2 + ... \in \mathcal{S}$, et $w_0 \notin f(D)$ (i.e. $f(z) \neq w_0$ si $|z| < 1$). Alors $|w_0| \geq 1/4$. De plus, l'inégalité a lieu si et seulement si f est une rotation de la fonction de Koebe.*

Démonstration. On considère :

$$g(z) = \frac{w_0 f(z)}{w_0 - f(z)} = h(f(z)), \quad \text{où} \quad h(w) = \frac{w_0 w}{w_0 - w}.$$

Comme f et h sont injectves sur D et $f(D)$ respectivement, donc g est aussi injective sur D.

Considérons le développement en série entière de g ; on a :

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{z + a_2 z^2 + ...}{1 - (w_0^{-1} z + a_2 w_0^{-1} z^2 + ...)} \\ &= (z + a_2 z^2 + ...)(1 + w_0^{-1} z + ...) \\ &= z + (a_2 + w_0^{-1}) z^2 + ... \end{aligned}$$

Puisque $g \in \mathcal{S}$, par le Théorème 2.2., $|a_2 + w_0^{-1}| \leq 2$. Alors $|1/w_0| \leq |a_2| + 2 \leq 4$, *i.e.* $|w_0| \geq 1/4$. Si de plus, $|w_0| = 1/4$ alors $|a_2| = 2$, donc f est une rotation de k.

Réciproquement, supposons que f est une rotation de la fonction de k, *i.e.* $f(z) = e^{-i\alpha} k(e^{i\alpha} z)$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors comme $k(D) = \mathbb{C} \backslash (-\infty, -\frac{1}{4}]$, $f(D) = \mathbb{C} \backslash (-\infty e^{-i\alpha}, -\frac{1}{4} e^{-i\alpha}]$. Alors en choisissant $w_0 = -\frac{1}{4} e^{-i\alpha}$, on sait que $|w_0| = \frac{1}{4}$ et $w_0 \notin f(D)$.

$\square$

Remarque : Pourquoi a-t-on défini une fonction h ainsi ? En réalité on a besoin d'une fonction h holomorphe telle que $h \circ f$ est injective. Le choix le plus simple est l'application $h(w) = \frac{aw+b}{cw+d}$ qui est un automorphisme de la sphère de Riemann $\mathbb{S}$. Alors pour $w_0 \notin \mathrm{Im} f$, si l'on considère g telle que $g(w_0) = \infty$, alors $g \circ f$ est une fonction holomorphe injective. Si l'on suppose de plus que $h \circ f(0) = 0$, $(h \circ f)'(0) = 1$, on obtenit $h(w) = \frac{w_0 w}{w_0 - w}$.

Le théorème de distorsion est un outil permettant de donner une borne sur les $|a_n|$, $n \geq 3$:

Théorème 3.8. *(Théorème de distorsion) Si $f \in \mathcal{S}$ et $|z| < 1$, alors :*

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}; \tag{1}$$

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}. \tag{2}$$

Démonstration. Pour $z_0 \in D$, on considère :

$$A(w) = \frac{w+z_0}{1+w\overline{z_0}}.$$

C'est une fonction biholomorphe de D, avec $A(0) = z_0$. On considère :

$$h(w) = \frac{f(A(w)) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)}.$$

C'est une fonction injective de $\mathcal{S}$ comme A est biholomorphe. Par un calcul direct, on a en effet : $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$, et de plus $h''(0) = \frac{1}{2}(1-|z_0|^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \overline{z_0}$. En appliquant le Théorème 2.2. du cas $n = 2$, on a :

$$|h''(0)| \leq 2, \quad i.e. \quad \left| z\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2}$$

pour tout $|z| < 1$ avec z remplace z_0 (pour simplifier la notation).

Avec $z = re^{i\alpha}$, l'inégalité devient :

$$\frac{4}{1-r^2} \geq \left| e^{i\alpha}\frac{f''(re^{i\alpha})}{f'(re^{i\alpha})} - \frac{2r}{1-r^2} \right| = \left| \frac{\partial}{\partial r}\log[(1-r^2)f'(re^{i\alpha})] \right|.$$

On intègre le long segment allant de 0 à z ; comme $f'(0) = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
|\log[(1-r^2)f'(re^{i\alpha})]| &= \left| \int_0^r \frac{\partial}{\partial \rho}\log[(1-\rho^2)f'(\rho e^{i\alpha})]d\rho \right| \\
&\leq \int_0^r \left| \frac{\partial}{\partial \rho}\log[(1-\rho^2)f'(\rho e^{i\alpha})] \right| d\rho \\
&\leq \int_0^r \frac{4}{1-\rho^2}d\rho = 2\log\left(\frac{1+r}{1-r}\right).
\end{aligned}$$

En considérant la partie réelle de $\log[(1-r^2)f'(re^{i\alpha})]$ et passant à l'exponentielle, on a l'inégalité (1).

Avec la même méthode, on a :

$$|f(re^{i\alpha})| = \left| \int_0^r \frac{\partial}{\partial \rho}f(\rho e^{i\alpha})d\rho \right| = \left| \int_0^r f'(\rho e^{i\alpha})d\rho \right| \leq \int_0^r |f'(\rho e^{i\alpha})|d\rho \leq \int_0^r \left| \frac{1+\rho}{(1-\rho)^3} \right| d\rho = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

Pour l'autre direction de (2), on considère le segment allant de 0 à $f(z)$ noté $[0, f(z)]$.

Si $[0, f(z)] \subset f(D)$, on définit $\gamma(t) = f^{-1}(tf(z)),\ t \in [0,1]$. Comme f est injective, γ est une courbe dans D. Alors on a :

$$|f(z)| = \int_0^1 \left|\frac{df(\gamma(t))}{dt}\right| dt = \int_0^1 |f'(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt.$$

La première equation a lieu, parce que $\int_0^1 |\frac{df(\gamma(t))}{dt}|dt$ est la longueur de $[0, f(z)]$, *i.e.* $|f(z)|$.

Considérons à présent $|\gamma(t)|$. Avec la définition $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ où $x, y : [0,1] \to \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{d|\gamma(r)|}{dt} = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}}$$

est une fonction continue dans $(0, 1]$. Puisque $f^{-1}(z) = z + ...$, on a $\gamma(t) = f(z)t + O(t^2)$. Alors $\frac{d|\gamma(r)|}{dt}$ bien définie en 0 avec valeur $|f(z)|$. Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\frac{d|\gamma(r)|}{dt} = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}} \leq \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = |\gamma'(t)|. \tag{3}$$

Avec l'inégalité (1) et (3), on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f'(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt &\geq \int_0^1 |f'(\gamma(t))|d|\gamma(t)| \\ &\geq \int_0^r \frac{1-\rho}{(1+\rho)^3}d\rho = \frac{r}{(1+r)^2}.\end{aligned}$$

Si $[0, f(z)] \nsubseteq f(D)$, alors il y a un $w_0 \in [0, f(z)]$ tel que $w_0 \nsubseteq f(D)$. Par le Théorème 3.7. et la relation $\max_{r\in[0,1]} \frac{r}{(1+r)^2} = 1/4$, on a aussi :

$$|f(z)| \geq |w_0| \geq 1/4 \geq \frac{|z|}{(1+|z|)^2}.$$

Finalement, on finit le preuve de (2).

□

Corollaire 3.9. *Pour tout* $f : z \mapsto z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n \in \mathcal{S},\ |a_n| \leq n^2e^2/4,\ n = 3, 4, ...$

Démonstration. On note $C_r = \{z||z| = r\}$. Par la formule intégrale de Cauchy et le Théorème 3.8., on a :

$$|a_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right| \leq \frac{1}{r^n}\frac{r}{(1-r)^2}.$$

Puisque la fonction $\frac{1}{r^{n-1}(1-r)^2}$ obtinet son maximum en $r = \frac{n-1}{n+1}$, on a :

$$|a_n| \leq \frac{1}{4}(\frac{n}{n-1})^{n-1}(\frac{n+1}{n})^{n+1}.$$

On va prouver l'inégalité :

$$(\frac{n}{n-1})^{n-1}(\frac{n+1}{n})^{n+1} \leq e^2$$

qui finit le preuve de ce corollaire.

On considère la fonction :

$$g(x) = (1+x)\log(1+x) + (x-1)\log(1-x) - 2x.$$

On a :

$$g'(x) = \log(1+x) + \log(1-x) = \log(1-x^2) \leq 0.$$

Alors $g(x) < g(0) = 0$ pour $x > 0$. Si l'on considère $x = 1/n$ et l'inégalité $e^{g(1/n)} \leq 1$, on obtient :

$$(\frac{n}{n-1})^{n-1}(\frac{n+1}{n})^{n+1} \leq e^2.$$

□

Remarque : Maintenant pour toute $f \in \mathcal{S}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, si l'on considère une fonctionnel :

$$T_n : \mathcal{S} \to \mathbb{C}, \quad f \to a_n(f)$$

où $a_n(f)$ est le n-ème coefficient de f. Avec la définition $|T_n| = \sup_{f \in \mathcal{S}} |T_n(f)|$, le Corollaire 3.9. dit que $|T_n| \leq n^2e^2/4$, i.e. T_n est bornée comme une fonctionnel ! Par le même point de vue, la conjecture de Biebebach dit que $|T_n| = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4 Preuve du cas $n = 3$ de la conjecture de Bieberbach

Dans cette section, on donne une preuve du Théorème 2.2. du cas $n = 3$ donné par C. Loewner en 1923. Le schéma de preuve est le suivant : on considère une fonction $f(z,t) : D \times [0, \infty) \to \mathbb{C}$ vérifiant certaines conditions, appelé chaîne de Loewner. Une condition importante est : pour t fixe, $f(z,t)$ est holomorphe et injective. On va montrer pour $f \in \mathcal{S}$, on peut toujours trouver une chaîne de Loewner $f(z,t)$, telle que $f(z,0) = f(z)$, *i.e.*, on peut toujours plonger $f(z)$ dans une chaîne de Loewner. Par ailleurs, pour cette chaîne de Loewner, on a l'EDP :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = z\frac{\partial f}{\partial z}(z,t)p(z,t)$$

où $p(z,t) : D \times [0, \infty) \to \mathbb{C}$ est holomorphe par rapport à z et $\mathrm{Re}p > 0$. Finalement, on considère le développement en série par rapport à z de l'EDP ci-dessus. En comparant les coefficients, on va prouver $|a_2| \leq 2$ et $|a_3| \leq 3$. On suit les références [1] et [2].

4.1 Préliminaire

Pour l'application future, on a besoin des théorèmes et lemmes suivants. Le lecteur peut aller directement à la sous-section 4.2., quitte à revenir ici si les définitions et les théoremes de cette sous-section lui font défait.

Tout d'abord, on rappelle le lemme de Schwarz et le théorème de l'application de conforme de Riemann sans preuve (*cf.* [4]) :

Lemme 4.1. *(Lemme de Schwarz) Soit $f : D \to D$ holomorphe telle que $f(0) = 0$. Alors :*
(1) $|f'(0)| \leq 1$ et, pour tout $z \in D$, on a $|f(z)| \leq |z|$.
(2) L'égalité a lieu ssi f est un automorphisme du disque.

Corollaire 4.2. *Soit $f : D \to D$ et $g : D \to D$ avec $g(0) = 0$. Alors :*
(1) $|f'(0)| \leq 1 - |f(0)|^2$.
(2) $|g'(z)| \leq \frac{1}{1-|z|^2}$

Démonstration. Pour (1), on note :

$$h(z) = \frac{z - f(0)}{1 - \overline{f(0)}z}.$$

Alors $h \circ f : D \to D$ avec $h \circ f(0) = 0$. Par le Lemme 4.1.,

$$|(h \circ f)'(0)| = |h'(f(0))| \cdot |f'(0)| = |\frac{1-|f(0)|^2}{(1-|f(0)|^2)^2}| \cdot |f'(0)| \leq 1 \quad i.e. \quad |f'(0)| \leq 1 - |f(0)|^2.$$

Pour (2), on note :

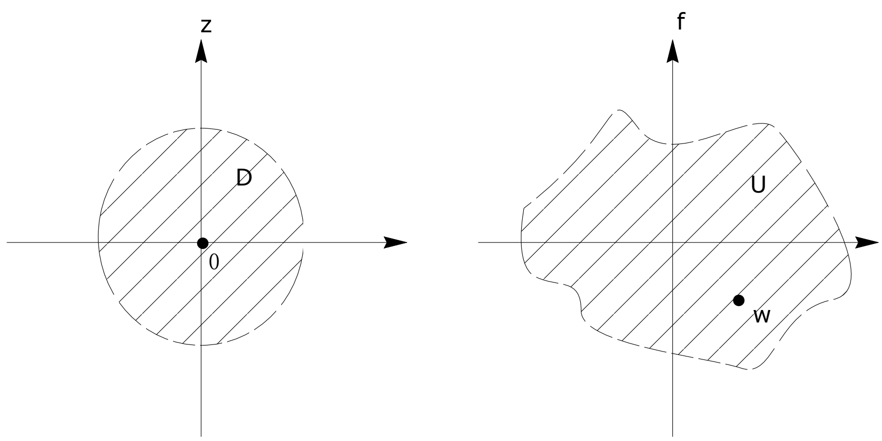
$$\widetilde{h}(z) = \frac{z+z_0}{1+z\overline{z_0}}.$$

Alors $g \circ \widetilde{h} : D \to D$. Par (1), $|(g \circ \widetilde{h})'(0)| \leq 1 - |(g \circ \widetilde{h})(0)|^2$, *i.e.* $|g'(z_0)| \cdot |1-|z_0|^2| \leq 1 - |g(z_0)|^2$. En fixant z, et en faisant $z_0 = z$, on a :

$$|g'(z)| \leq \frac{1-|g(z)|^2}{1-|z|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}.$$

□

Théorème 4.3. *(Théorème de l'application conforme de Riemann) Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe distinct de $\mathbb{C}$. Alors pour $w \in U$ et $0 \leq \alpha < 2\pi$, il existe une fonction unique biholomorphe $f : D \to U$, telle que $f(0) = w$ et $\arg(f'(0)) = \alpha$.*



(a) (b)

Figure 3 – L'application conforme de Riemann

Maintenant on considère un lemme qui établit une inégalité important sur les fonctions holomorphes $p : D \to \{z | \operatorname{Re}(z) > 0\}$ avec $p(0) = 1$. On va le utiliser pour vérifier certains propriétés des chaînes de Loewner.

Lemme 4.4. *Soit $p : D \to \{z | \operatorname{Re}(z) > 0\}$ une fonction holomorphe avec $p(0) = 1$, dont on écrit le développement en série $p(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + ...$ Alors on a $|c_n| \leq 2$ pour tout $n \geq 1$.*

Démonstration. On écrit $p(z) = u(z) + iv(z)$. Pour $0 < r < 1$ fixe, on considère $|z| < r$. Par la formule intégrale de Cauchy, on a :

$$p(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{p(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Si l'on note $w = r^2/\overline{z}$, alors $\frac{p(\zeta)}{\zeta - w}$ est une fonction holomorphe de ζ sur $|\zeta| < r^2/|z|$. Alors par la formule intégrale de Cauchy (version de fonction holomorphe) :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{p(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta = 0.$$

Par un calcul direct, on a :

$$p(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{p(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{p(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{re^{it} + z}{re^{it} - z}) p(re^{it}\right) dt$$

avec changement de variable $\zeta = re^{it}$. En considérant la partie réelle de cette équation, on a :

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(\frac{re^{it} + z}{re^{it} - z}) u(re^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \mathrm{Re}\left(\int_0^{2\pi} \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z} u(re^{it}) dt \right).$$

On a donc la relation entre fonctions holomorphes de z : $\mathrm{Re}(p(z)) = \mathrm{Re}(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}+z}{re^{it}-z} u(re^{it}) dt)$. Alors par le théorème d'application ouverte :

$$p(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z} u(re^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\int_0^{2\pi} \frac{2}{(re^{it})^n} u(re^{it}) dt) z^n \right) \tag{4}$$

parce que $p(z) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}+z}{re^{it}-z} u(re^{it}) dt \in \{z | z \in i\mathbb{R}\}$ qui ne contient pas un ouvert de $\mathbb{C}$. En particulier, $1 = p(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{it}) dt$.

Par (4), on a, pour $n \geq 1$,

$$|c_n| = |\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2}{(re^{it})^n} u(re^{it}) dt)| \leq \frac{2}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} u(re^{it}) dt = \frac{2}{r^n}.$$

En faisant $r \to 1_-$, on a $|c_n| \leq 2$.

□

Pour vérifier que l'espace des chaînes de Loewner est compact (*cf.* Lemme 4.12.), on a besoin du Théorème d'Arzelà-Ascoli suivant. On le donne sans preuve (*cf.* [3]) :

Théorème 4.5. *Soient K un espace métrique compact de $\mathbb{R}^r$ et $f_n : K \to \mathbb{R}^q$ une suite d'applications continues pour $n \in \mathbb{N}$. On suppose que :*

(1) la suite (f_n) est uniformément borneé, i.e. il existe $M > 0$ tel que $\|f_n\| < M$.

(2) (f_n) est équicontinue en $x \in K$, c'est-à-dire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage V de x tel que $\|f_n(x) - f_n(y)\| < \epsilon$ pour $y \in V$.

On peut alors extraire de la suite (f_n) une sous-suite qui converge uniformément sur K.

Pour prouver que la limite d'une suite de chaîne de Loewner est encore une chaîne de Loewner, on a besoin du théorème de Hurwitz suivant. Alors on le donne sans preuve (*cf.* [4]) :

Théorème 4.6. *(Théorème de Hurwitz) Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et $f_n : U \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions holomorphes qui converge localement uniformément vers une fonction holomorphe $h : U \to \mathbb{C}$. On suppose que chacune des fonctions f_n est injective. Alors h est constante ou h est également injective.*

On introduit à present le concept de *convergence au sens des noyaux*, auquel s'applique le Théorème du noyau de Carathéodory. Grâce à ce Théorème, on peut construire les deux chaînes de Loewner dans l'**Exemple(*)** et le Théorème 4.13 ci-dessous.

Définition 4.7. *Soit (F_n) une suite de domaines*[4] *avec $0 \in F_n$. Le noyau de (F_n) est défini comme l'ensemble contenant 0 et tous les $w \in \mathbb{C}$ avec la propriété suivant :*

Il existe un domaine H avec $0 \in H$, $w \in H$ tel que $H \subset F_n$ pour tout n suffisamment grand.

On dit que (F_n) converge vers F si toute sous-suite a le même noyau. Dans ce cas, on dit que $F_n \to F$ au sens des noyaux.

Remarque : Soit $G(t)$ $(0 \leq t < \infty)$ une famille de domaines simplements connexes telle que :

(i) $0 \in G(s) \subsetneq G(t)$, si $0 \leq s < t < +\infty$.

(ii) Pour t fixe et $w \in G(t)$, il existe $s < t$ tel que $w \in G(s)$.

(iii) Pour t fixe et $w \notin G(t)$, il existe $s > t$ tel que $w \notin G(s)$.

Alors pour t fixe, lorsque $t_n \to t$, $G(t_n) \to G(t)$ au sens des noyaux. Pour $w \in G(t)$, par (ii) il existe un $\epsilon > 0$ tel que $w \in G(t - \epsilon)$. Alors par (i) et le fait que $t_n \to t$, il existe un $N > 0$ tel que $w \in G(t_n)$ avec tout $n > N$. Pour $w \notin G(t)$, par (iii) il existe un $\epsilon > 0$ tel que $w \notin G(t + \epsilon)$. Alors par (i) et le fait que $t_n \to t$, il existe $N > 0$ tel que $w \notin G(t_n)$ avec tout $n > N$. Alors $(G(t_n))$ converge vers $G(t)$ au sens des noyaux.

Par la remarque ci-dessus, on sait que le exemple suivant qui va apparaître dans la sous-section 4.2 illustrent une convergence au sens des noyaux.

Exemple : Pour $w \neq 0$ et un arc de Jordan Γ de w à ∞, on considère $G(t) = \mathbb{C} - \{\gamma(u) | u \geq t\}$. Alors $G(t_k) \to G(t)$ au sens des noyaux pour $0 \leq t < +\infty$ et toute suite $(t_k)_k$ qui converge vers t (voyez l'**Exemple(*)** dans la sous-section 4.2).

On a le Théorème du noyau de Carathéodory qui relie la convengence d'une suite de fonctons holomorphes injectives avec le convergence au sens des noyaux de leur image :

Théorème 4.8. *(Théorème du noyau de Carathéodory) Soient $f_n (n = 1, 2, ...)$ sont holomorphes et injectives sur D avec $f_n(0) = 0$, $f_n'(0) > 0$, $F_n = f_n(D)$. Alors (f_n) converge localement uniformément*[5] *sur D vers une fonction f ssi (F_n) converge vers son noyau F avec $F \neq \mathbb{C}$. De plus, on a $f(D) = F$.*

Démonstration. *cf.* [2] p.29.

□

Finalement, on énonce le résultat suivant d'analyse réelle sans preuve (*cf.* [5]), utile pour définir et utiliser la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial t}(z, t)$ d'une chaîne de Loewner $f(z, t)$:

Théorème 4.9. *Soit F absolument continue sur $[a, b]$*[6]*. Alors F' existe presque partout et est*

4. On toujours dit un domaine est un ouvert simplement connexe dans $\mathbb{C}$.
5. On dit que (f_n) converge localement uniformément sur un domaine D' vers f, si (f_n) converge uniformément vers f sur chaque compact de D'.
6. On dit qu'une fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ est absolument continue si, pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que, pour toute suite $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-intervalles de $[a, b]$ d'intérieurs disjoints, $\sum_{n \geq 0}(b_n - a_n) < \delta \Rightarrow \sum_{n \geq 0} |F(b_n) - F(a_n)| < \epsilon$.

intégrable. De plus, il satisfait de la formule de Newton-Leibniz :

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(y)dy, \quad \text{pour tout } a \leq x \leq b.$$

4.2 Chaîne de Loewner

Dans cette sous-section, on donne la définition et les propriétés d'une chaîne de Loewner. On prouve ensuite que si $f \in \mathcal{S}$, on peut plonger f dans une chaîne de Loewner.

Définition 4.10. *On dit que une fonction $f(z,t)$ $(z \in D, 0 \leq t < +\infty)$ est une chaine de Loewner si $f(\cdot, t)$ est holomorphe injective sur D pour t fixe, $f(z, \cdot)$ est mesurable sur $[0, +\infty)$ pour z fixe, et si :*

(i) $f(D,s) \subsetneq f(D,t)$ pour $0 \leq s < t < +\infty$.

(ii) $f(0,0) = 0, f'(0,t) = e^t$. [7]

Pour $0 \leq s < t < +\infty$, on définit :

$$\varphi(\cdot, s, t) : D \to D \quad \text{par} \quad \varphi(z,s,t) = [f(\cdot,t)^{-1} \circ f(\cdot, s)](z).$$

C'est une fonction holomorphe injective. De plus, on a pour tout $z \in D$:

$$f(\varphi(z,s,t),t) = f(z,s). \tag{5}$$

Remarque : Si l'on considère la condition suivante :

(i') Pour $0 \leq s \leq t < +\infty$, il existe une fonction holomorphe injective $\varphi(z,s,t)$ sur D qui satisfait $|\varphi(z,s,t)| \leq |z|$ et la equation (4), et si $s \neq t$, $\varphi(z,s,t)$ n'est pas une bijection de D sur lui-même.

Alors on a $(i) \Leftrightarrow (i')$. Par l'argument au-dessus et le Lemme 4.1., $(i) \Rightarrow (i')$. De plus, par $|\varphi(z,s,t)| \leq |z|$, on a $f(D,s) = f(\varphi(D,s,t),t) \subsetneq f(D,t)$. Alors $(i) \Leftarrow (i')$.

Exemple(*) : Pour $w \neq 0$ et un arc de Jordan Γ de w à ∞ [8], on considère $G(t) = \mathbb{C} - \{\gamma(u) | u \geq t\}$. Par un Corollaire direct de Théoréme 3.1. (qui est continu dans le preuve de Théorème 3.1.), $G(t)$ est simplement connexe pour chaque t. Par le Théorème 4.3., on définit $f(z,t)$ comme une fonction biholomorphe : $f(\cdot,t) : D \to G(t)$, telle que $f(0,t) = 0, f'(0,t) > 0$. On va vérifier les conditions suivant :

(1) $t \mapsto f'(0,t)$ est strictement croissante.

(2) $t \mapsto f'(0,t)$ est continue par rapport à t.

(3) $\lim_{t \to +\infty} f'(0,t) = +\infty$.

Pour (1), par le Lemme 4.1., on a $|\varphi(z,s,t)| \leq |z|$ et $|\frac{\partial \varphi}{\partial z}(0,s,t)| \leq 1$. Par la définition de φ ci-dessus, on a $|\frac{\partial \varphi}{\partial z}(0,s,t)| = |\frac{f'(0,s)}{f'(0,t)}| \leq 1$, i.e. $|f'(0,s)| \leq |f'(0,t)|$. Puisque $f(D,s) \neq f(D,t)$, l'inégalité est stricte, alors (1) est vrai.

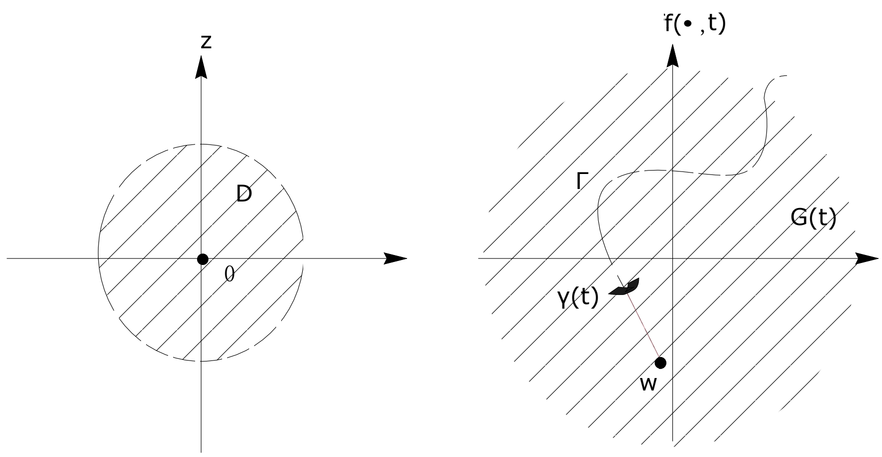
Pour (2), par la remarque de la Définition 4.7., on sait que pour $0 \leq t < +\infty$ et $t_n \to t$, $f(D, t_n) \to f(D,t)$ au sens des noyaux. Alors par le Théorème 4.8., $(f(\cdot, t_n))$ converge localement uniformément sur D vers $f(\cdot, t)$. Alors pour (t_n) est une arbitraire suite qui converge vers t, $f'(0,t_n) \to f'(0,t)$. Alors $f'(0, \cdot)$ est continue.

7. Pour simplifier l'écriture, on écrit $f'(z,t)$ comme $\frac{\partial f}{\partial z}(z,t)$.

8. C'est-à-dire une courbe image d'une application $\gamma(t)$, continue et injective de $[0, +\infty)$ vers le plan $\mathbb{R}^2$ avec $\lim_{t \to +\infty} \gamma(t) = \infty$.

Pour (3), on sait que pour tout $N > 0$, il y a un $t > 0$ tel que $\{z||z| < N\} \subset f(D,t)$. Par le Lemme 4.1., on a $|[(f(\cdot,t))^{-1}]'(0)| \leq 1/N$, alors $|f'(0,t)| \geq N$. En faisant $N \to +\infty$, on a $\lim_{t\to+\infty} f(0,t) = +\infty$.

Si l'on a de plus $f(\cdot,0) \in \mathcal{S}$, *i.e.* $f'(0,0) = 1$. Alors en définissant $t_0 = \ln(f'(0,t))$ et $f^*(z,t_0) = f(z,t)$, on sait que $f^*(\cdot,t_0) = f(\cdot,t)$ est holomorphe injective sur D. Par (2), (3) ci-dessus, $t_0 \mapsto f^*(z,t_0)$ est mesurable sur $[0,+\infty)$. De plus, pour $0 \leq s_0 < t_0 < +\infty$ tels que $f'(0,s) = e^{s_0}$, $f'(0,t) = e^{t_0}$. Par (1), $0 \leq s < t < +\infty$. Alors $f^*(D,s_0) = f(D,s) \subsetneq f(D,t) = f^*(D,s_0)$. On a aussi $f^*(0,0) = f(0,0) = 0$ et $(f^*)'(0,t_0) = f'(0,t) = e^{t_0}$. Alors $f^*(z,t)$ est une chaîne de Loewner. Si l'on utilise t remplacer t_0 et f^* remplacer f pour simplifier la notaion, on pour supposer d'abord que $f'(0,t) = e^t$, *i.e.* $f(z,t)$ est une chaîne de Loewner.



(a) (b)

FIGURE 4 – Exemple(*)

Maintenant pour $f(z,t)$ et $\varphi(z,s,t)$ défini au-dessus, on a le lemme suivant :

Lemme 4.11. *Pour $f(z,t)$ et $\varphi(z,s,t)$ comme dans la Définition 4.10., on a :*

$$|f(z,t) - f(z,s)| \leq \frac{8|z|}{(1-|z|)^4}(e^t - e^s), \tag{6}$$

$$|\varphi(z,t,u) - \varphi(z,s,u)| \leq \frac{2|z|}{(1-|z|)^2}(1 - e^{s-t}), \tag{7}$$

où $0 \leq s \leq t \leq u < +\infty$.

Démonstration. On considère :

$$p(z,s,t) = \frac{1+e^{s-t}}{1-e^{s-t}} \cdot \frac{1 - z^{-1}\varphi(z,s,t)}{1 + z^{-1}\varphi(z,s,t)} \tag{8}$$

Puisque $\varphi(z,s,t) = e^{s-t}z + \ldots$ et $|\varphi(z,s,t)| \leq |z|$, avec le fait que $w \mapsto \frac{1-w}{1+w}$ est une fonction biholomorphe de D à $\{z|\mathrm{Re}(z) > 0\}$, on a $p(0,s,t) = 1$ et $\mathrm{Re}p > 0$. Par le Lemme 4.4., on a

$p(z,s,t) \leq 1+2|z|+2|z|^2+... = \frac{1+|z|}{1-|z|}$. En utilisant (8) et cette inégalité, on a :

$$|z-\varphi(z,s,t)| = \left|(z+\varphi(z,s,t))\cdot p(z,s,t)\cdot\frac{1-e^{s-t}}{1+e^{s-t}}\right| \leq 2|z|\frac{1+|z|}{1-|z|}(1-e^{s-t}) \tag{9}$$

De plus :

$$|f(z,t)-f(z,s)| = |f(z,t)-f(\varphi(z,s,t),t)| \leq \int_{\varphi(z,s,t)}^{z}|f'(\zeta,t)|d\zeta$$

Par le Théorème 3.8., on a :

$$|f(z,t)-f(z,s)| \leq |z-\varphi(z,s,t)|\cdot\frac{e^t(1+|z|)}{(1-|z|)^3} \leq \frac{8|z|}{(1-|z|)^4}(e^t-e^s)$$

Pour la deuxième inégalité, la preuve est identique. D'abord on a $\varphi(z,s,u) = \varphi(\varphi(z,s,t),t,u)$ par (5) et le définition de φ. Il vient donc :

$$|\varphi(z,s,u)-\varphi(z,t,u)| = |\varphi(\varphi(z,s,t),t,u)-\varphi(z,t,u)| \leq |z-\varphi(z,s,t)|\cdot\frac{1}{1-|z|^2} \leq \frac{2|z|}{(1-|z|)^2}(1-e^{s-t})$$

On a utilisé l'inégalité $|\frac{\partial\varphi}{\partial z}(\zeta,s,t)| \leq \frac{1}{1-|z|^2}$ avec $|\zeta| \leq |z|$ par le Corollaire 4.2.(2).

□

Maintenant pour tout $f \in \mathcal{S}$, on va trouver une chaine de Loewner $f(z,t)$, telle que $f(z) = f(z,0)$. D'abord, on a le lemme suivant :

Lemme 4.12. *L'espace des chaînes de Loewner est compact, i.e. pour toute suite de chaînes de Loewner $(f_n(\cdot,\cdot))$, il existe une sous-suite $(f_{n,+\infty}(\cdot,\cdot))_n$ et une nouvelle chaîne de Loewner $f(z,t)$ telle que pour $t \geq 0$, $(f_{n,+\infty}(\cdot,t))_n$ converge localement uniformément vers $f(\cdot,t)$ sur D.*

Démonstration. Pour $K_m = \{z||z| \leq 1-1/m\}\times[0,m]$ $(m \geq 2)$ compact de $D\times[0,+\infty)$, et une suite de chaine de Loewner $(f_n(\cdot,\cdot))$, par le Théorème 3.8., on a :

$$|f_n(z,t)| \leq \frac{|z|e^t}{(1-|z|)^2} \leq (m^2-m)e^m \quad \text{pour} \quad (z,t)\in K_m$$

Alors $(f_n(\cdot,\cdot))$ est uniformément borneé sur K_m. Pour $(z_1,s),(z_2,t) \in K_m$ avec $s \leq t$, par le Théorème 3.8. et le Lemme 4.11., on a :

$$\begin{aligned}
|f_n(z_1,s)-f_n(z_2,t)| &\leq |f_n(z_1,s)-f_n(z_1,t)|+|f_n(z_1,t)-f_n(z_2,t)| \\
&\leq |f_n(z_1,s)-f_n(z_1,t)|+\max_{\zeta\in[z_1,z_2]}|f_n'(\zeta,t)|\cdot|z_1-z_2| \\
&\leq \frac{8|z_1|}{(1-|z_1|)^4}(e^t-e^s)+\max_{\zeta\in[z_1,z_2]}\frac{(1+|\zeta|)e^t}{(1-|\zeta|)^3}\cdot|z_1-z_2| \\
&\leq 8m^3(m-1)e^m|s-t|+m^2(2m-1)e^m|z_1-z_2|.
\end{aligned}$$

Alors $(f_n(\cdot,\cdot))$ est équicontinue en $(z_1,s)\in K_m$. Par le Théorème 4.5., on peut extrairer de la suite $(f_n(\cdot,\cdot))$ une sous-suite $(f_{n,K_m}(\cdot,\cdot))$ qui converge uniformément sur K_m.

Maintenant pour $K_2 \subset K_3 \subset K_4 \subset ...$ espaces compacts définis ci-dessus, on peut d'abord extraire de la suite $(f_n(\cdot,\cdot))$ une sous-suite $(f_{n,2}(\cdot,\cdot))$ qui converge uniformément sur K_2.
Après, on extrait de la suite $(f_{n,2}(\cdot,\cdot))$ une sous-suite $(f_{n,3}(\cdot,\cdot))$ qui converge uniformément sur K_3.
......

Après, on extrait de la suite $(f_{n,i}(\cdot,\cdot))$ une sous-suite $(f_{n,i+1}(\cdot,\cdot))$ qui converge uniformément sur K_{i+1}.
......

Maintenant, on définit une nouvelle suite $(f_{n,+\infty}(\cdot,\cdot))$ par $f_{n,+\infty}(z,t) = f_{n,n}(z,t)$. Par définition, $(f_{n,+\infty}(\cdot,\cdot))$ converge localement uniformément sur $D \times [0,+\infty)$. On note $f(\cdot,\cdot)$ la limite de $f_{n,+\infty}(\cdot,\cdot)$. Alors $f(\cdot,t)$ est une fonction holomorphe sur D pour $t \in [0,+\infty)$ avec $f'(0,t) = e^t$, parce que la convergence est localement uniformément. Par le Théorème 4.6., $f(\cdot,t)$ est injective sur D pour t fixe.

Pour vérifier que $f(z,t)$ est une chaîne de Loewner, il suffit de trouver une fonction holomorphe injective $\varphi(z,s,t)$ sur D qui satisfait $|\varphi(z,s,t)| \leq |z|$ et l'equation $f(\varphi(z,s,t),t) = f(z,s)$ pour $0 \leq s \leq t < +\infty$ fixe. Comme $f_{n,+\infty}(z,t)$ est une chaîne de Loewner, il existe une fonction holomorphe injective $\varphi_n(\cdot,s,t)$ sur D qui satisfait $|\varphi_n(z,s,t)| \leq |z|$ et l'equation $f_{n,+\infty}(\varphi_n(z,s,t),t) = f_{n,+\infty}(z,s)$. Alors pour $0 \leq s \leq t < +\infty$ fixe, par le Lemme 4.1, le Corollaire 4.2 et le Théorème 4.5., on peut copier la preuve ci-dessus en l'adaptant pour extraire de la suite $(\varphi_{n,+\infty}(\cdot,s,t))$ une sous-suite $(\varphi_n(\cdot,s,t))$ qui converge localement uniformément sur D vers une fonction $\varphi(\cdot,s,t)$. De plus, en faisant $k' \to +\infty$, $\varphi(\cdot,s,t)$ est une fonction holomorphe sur D avec $|\varphi(z,s,t)| \leq |z|$ et $f(\varphi(z,s,t),t) = f(z,s)$. Par le Théorème 4.6., $\varphi(\cdot,s,t)$ est injective. Alors $f(z,t)$ est aussi une chaine de Loewner, ce qui achéve la preuve.

□

Finalement, on peut donner le théorème suivant qui prolonge toute $f \in \mathcal{S}$ en une chaîne de Loewner :

Théorème 4.13. *Pour toute $f \in \mathcal{S}$, il existe une chaine de Loewner $f(z,t)$ telle que $f(z) = f(z,0)$.*

Démonstration. Pour $r_n = 1 - 1/n$, on considère l'application $r_n^{-1} f(r_n z)$ définie sur $\overline{D}$. Cette fonction envoie D sur un domaine G_n de bord C_n une courbe de Jordan. On note H_n l'extérieur de C_n. Après changement de coordonnée ($z \mapsto 1/z$), par le Théorème 4.3, on peut trouver une fonction biholomorphe :

$$g_n : \Delta \cup \{\infty\} \to H_n \cup \{\infty\}, \quad g_n(\infty) = \infty.$$

On note $C_n(t) = \{g_n(\zeta) | |\zeta| = e^t\}$; c'est une courbe de Jordan. On note $G_n(t)$ l'intérieur de $C_n(t)$. Par le Théorème 4.3., pour $t \geq 0$, on définit f comme la fonction biholomorphe :

$$f_n(\cdot,t) : D \to G_n(t), \quad \text{telle que} \quad f_n(0,t) = 0,\ f_n'(0,t) > 0.$$

Par l'unicité du Théorème 4.3., $f_n(z,0) = r_n^{-1} f(r_n z)$, *i.e.* $f_n'(0,0) = 1$. Alors avec le reparamétrisation $e^{t_0} = f_n'(0,t)$ et $f_n^*(z,t_0) = f_n(z,t)$, on peut supposer que $f_n(z,t)$ est une chaine de Loewner pour la même raison que dans l'**Exemple(*)** ci-dessus[9]. Par le Lemme 4.12., il existe une sous-suite (f_{m_n}) de (f_n) et une nouvelle chaine de Loewner $f(z,t)$ telle que pour $t \geq 0$, $f_{m_n}(\cdot,t)$ convergent localement uniformément vers $f(\cdot,t)$ sur D[10]. Si l'on considère $t = 0$, on a $f_{m_n}(z,0) = r_{m_n}^{-1} f(r_{m_n} z)$ qui converge localement uniformément vers $f(z)$ lorsque $n \to +\infty$. Alors $f(z,0) = f(z)$, ce qui achève la preuve.

□

9. D'abord on sait que pour chaque t, $G_n(t)$ satisfait les conditions dans la remarque de Définition 4.7., alors $G_n(t_k) \to G_n(t)$ au sens des noyaux pour $0 \leq t < +\infty$ et toute suite $(t_k)_k$ qui converge vers t. Après on peut utiliser la preuve dans l'**Exemple(*)** directement.

10. Avec la notation du Lemme 4.12., on définit que $1 \leq m_1 < m_2 < ... < m_n < ...$ est la sous-suite de $\mathbb{N}$ telle que $f_{n,+\infty}(\cdot,\cdot) = f_{m_n}(\cdot,\cdot)$.

4.3 L'équation aux dérivées partielles vérifiée par $f(z,t)$ et la preuve du cas $n=3$ de la conjecture de Bieberbach

On va construire une EDP vérifiée par $f(z,t)$. La première étape est de montrer que $\frac{\partial f}{\partial t}(z,t)$ existe sur $D\times([0,\infty)\backslash E)$, où E est de mesure nulle [11]. Comme $f(z,t)$ est une fonction holomorphe sur D avec t fixe, on peut écrire :

$$f(z,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(t)z^n,\quad z\in D$$

Par la formule intégrale de Cauchy, pour $r\in(0,1)$, on a :

$$a_n(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\{z||z|=r\}}\frac{f(\zeta,t)}{\zeta^{n+1}}d\zeta. \tag{10}$$

Lemme 4.14. *Pour tout n et $T>0$, $a_n(t)$ est absolument continue sur $[0,T]$.*

Démonstration. Par (10) et (6) dans le Lemme 4.11., pour $s,t\in[0,T]$ on a :

$$\begin{aligned}|a_n(s)-a_n(t)|&=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\{z||z|=r\}}\frac{f(\zeta,t)-f(\zeta,s)}{\zeta^{n+1}}d\zeta\right|\\&\leq\frac{1}{2\pi}\int_{\{z||z|=r\}}\frac{8|\zeta|}{(1-|\zeta|)^4}\cdot\frac{|e^t-e^s|}{|\zeta^{n+1}|}d\zeta\\&\leq C_ne^T|t-s|.\end{aligned}$$

où :

$$C_n=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\{z||z|=r\}}\frac{8|\zeta|}{(1-|\zeta|)^4|\zeta|^{n+1}}d\zeta\right|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{8r}{(1-r)^4r^{n+1}}rie^{i\theta}d\theta\right|\leq\frac{8}{(1-r)^4r^{n-1}}.$$

Alors pour $\epsilon>0$, en choisissant $\delta=C_ne^T\epsilon$, on voit que $t\mapsto a_n(t)$ est absolument continue sur $[0,T]$.

□

Pour n fixe, $T=N\in\mathbb{N}$, par le Lemme 4.14. et le Théorème 4.9., il existe $E_{n,N}\subset[0,N]$ de mesure nulle tel que $a_n'(t)$ existe sur $[0,N]\backslash E_{n,N}$ qui satisfait de la formule de Newton-Leibniz. Si l'on définît $E=\bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{N=1}^{+\infty}E_{n,N}$, alors c'est un ensemble mesure nulle tel que $a_n'(t)$ existe sur $[0,+\infty]\backslash E$. De plus pour tout n :

$$a_n(b)-a_n(a)=\int_a^b a_n'(x)dx,\quad 0\leq a<b<+\infty.$$

On peut à présent donner le théorème suivant sur l'EDP vérifiée par $f(z,t)$:

Théorème 4.15. *Pour E défini ci-dessus, $\frac{\partial f}{\partial t}(z,t)$ existe sur $D\times([0,+\infty)\backslash E)$ et vérifie :*

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n'(t)z^n$$

De plus, il existe une fonction $p(z,t)$ holomorphe en $z\in D$ et mesurable par rapport à $t\in[0,+\infty)$ avec :

$$\mathrm{Re}p(z,t)>0\quad(z\in D,t\in[0,+\infty)),$$

11. On toujours considère la mesure de Lebesgue

telle que pour tout $(z,t) \in D \times ([0,+\infty)\backslash E)$, on a l'EDP :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = zp(z,t)\frac{\partial f}{\partial z}(z,t) \tag{11}$$

Démonstration. D'abord, pour $T > 0$, $t \in [0,T]\backslash E$ et $0 < r < 1$, par la preuve du Lemme 4.14 :

$$|a_n'(t)| \leq C_n e^T \leq \frac{8}{(1-r)^4 r^{n-1}} e^T.$$

Alors $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n'(t)z^n$ est bien défini pour $|z| < r$ et $t \in [0,T]\backslash E$. En faisant $T \to +\infty$ et $r \to 1_-$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n'(t)z^n$ est bien défini sur $D \times ([0,+\infty)\backslash E)$.

On montre ensuite que pour $|z| < r < 1$ et $t \in [0,T]\backslash E$, on a :

$$\lim_{s\to t} \frac{f(z,s) - f(z,t)}{s-t} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n'(t)z^n.$$

En faisant $T \to +\infty$ et $r \to 1_-$, on obtient la première partie du théorème. Par définition, il suffit de prouver que pour z tel que $|z| < r$ et un $t \in [0,T]\backslash E$ fixe, pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver un $\delta > 0$ tel que :

$$\left| \frac{f(z,s) - f(z,t)}{s-t} - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n'(t)z^n \right| < \epsilon \quad \text{pour tout } s \text{ tel que} \quad |s-t| < \delta.$$

Par définition :

$$\frac{f(z,s) - f(z,t)}{s-t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n(s) - a_n(t)}{s-t} z^n.$$

Par la preuve du Lemme 4.14, $|a_n'(t)| \leq C_n e^T$ et $|\frac{a_n(s)-a_n(t)}{s-t}| \leq C_n e^T$ avec $C_n \leq \frac{8}{(1-r)^4 r^{n-1}}$.

De plus, il existe $r_0 < r$ tel que $|z| < r_0$. Alors il existe $N > 0$ tel que :

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \left| \frac{a_n(s) - a_n(t)}{s-t} \right| \cdot |z|^n < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{et} \quad \sum_{n=N}^{+\infty} |a_n'(t)||z|^n < \frac{\epsilon}{3}.$$

De plus, comme $\lim_{s\to t} \frac{a_n(s)-a_n(t)}{s-t} = a_n'(t)$. On peut choisir $\delta > 0$ tel que

$$\left| \sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_n(s) - a_n(t)}{s-t} z^n - \sum_{n=1}^{N-1} a_n'(t)z^n \right| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{pour tout} \quad |s-t| < \delta.$$

Alors

$$\left| \frac{f(z,s) - f(z,t)}{s-t} - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n'(t)z^n \right| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Pour la deuxième partie du théorème, on définit :

$$p(z,s) = \frac{\partial f}{\partial t}(z,s)/(z\frac{\partial f}{\partial z}(z,s)) \quad \text{pour} \quad z \neq 0.$$

Puisque $f(z,s)$ est injective, $\frac{\partial f}{\partial z}(z,s) \neq 0$ pour $|z| < 1$. De plus, pour $s \in [0,+\infty)\backslash E$, $\frac{\partial f}{\partial t}(z,s)$ est holomorphe avec $\frac{\partial f}{\partial t}(0,s) = 0$. Alors pour $s \in [0,+\infty)\backslash E$ fixe, $z = 0$ est une singularité effaçable. Alors $p(\cdot,s)$ se prolonge en une fonction holomorphe définie sur D pour $s \in [0,+\infty)\backslash E$ fixe.

De plus, par l'équation (8) dans la démonstration du Lemme 4.11. On a :

$$\frac{f(z,t)-f(z,s)}{t-s}=\frac{e^{t-s}-1}{t-s}\cdot\frac{z+\varphi(z,s,t)}{e^{t-s}+1}\cdot\frac{f(z,t)-f(\varphi(z,s,t),t)}{z-\varphi(z,s,t)}p(z,s,t).$$

Pour $t\in[0,+\infty)\backslash E$, en faisant $s\to t$, on a $\frac{\partial f}{\partial t}(z,t)=z\frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\lim_{s\to t}p(z,s,t)$. Alors $\lim_{s\to t}p(z,s,t)=p(z,t)$. Comme $\mathrm{Re}(p(z,s,t))>0$, on a $\mathrm{Re}(p(z,t))\geq 0$. Si $p(\cdot,t)$ est une fonction holomorphe non constante pour t fixe, alors l'image de $p(\cdot,t)$ est ouvert, alors $\mathrm{Re}(p(z,t))>0$. Si $p(\cdot,t)$ est constante, alors $p(z,t)=p(0,t)=\lim_{s\to t}p(0,s,t)=1$. On a aussi $\mathrm{Re}(p(z,t))\geq 0$.

□

On termine la preuve du Théorème 2.2. du cas $n=3$. En comparant les coefficients de z^n des membres de gauche et de droite de (11), on a :

$$a_n'(t)=na_n(t)+\sum_{k=1}^{n-1}ka_k(t)p_{n-k}(t), \tag{12}$$

où $p(z,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}p_n(t)z^n$ pour $t\in[0,+\infty)\backslash E$. Par le Lemme 4.4. on a $|p_n(t)|\leq 2$ pour $n\geq 1$. En multipliant e^{-nt} et intégrant de t à $+\infty$, on a :

$$e^{-nt}a_n(t)=-\int_t^{+\infty}(\sum_{k=1}^{n-1}ka_k(s)p_{n-k}(s)e^{-ns}ds); \tag{13}$$

L'intégrale converge puisque $|a_k(s)|<\frac{k^2e^2}{4}e^s$ et $|p_k(s)|\leq 2$ par le Corollaire 3.9. et le Lemme 4.4.

En choisissant $n=2$ dans (13), on a :

$$a_2(t)=-e^{2t}\int_t^{+\infty}p_1(s)e^{-s}ds. \tag{14}$$

Puisque $|p_1(s)|\leq 2$, on a $|a_2|=|a_2(0)|=|\int_0^{+\infty}p_1(s)e^{-s}ds|\leq\int_0^{+\infty}2e^{-s}ds=2$, on obtient à nouveau le Théorème 2.2. du cas $n=2$.

En choisissant $n=3$ dans (13) et remplaçant $a_2(t)$ avec (14), on a :

$$a_3=-\int_0^{+\infty}p_2(t)e^{-2t}dt+(\int_0^{+\infty}p_1(t)e^{-t}dt)^2. \tag{15}$$

Avec $|p_1(t)|\leq 2$ et $|p_2(t)|\leq 2$, on a $|a_3|\leq 5$. Mais ce n'est pas la borne optimale, comme on le voit avec un peu plus de travail.

D'abord, en remplaçant $f(z)$ avec $e^{i\alpha}f(ze^{-i\alpha})$, où α réel tel que $e^{-2i\alpha}a_3\geq 0$, on peut supposer que $a_3\geq 0$. Ensuite par (15), on a :

$$|a_3|=\mathrm{Re}a_3\leq-\int_0^{+\infty}\mathrm{Re}p_2(t)e^{-2t}dt+(\int_0^{+\infty}\mathrm{Re}p_1(t)e^{-t}dt)^2. \tag{16}$$

On a besoin du lemme suivant (la preuve est donnée à la fin) :

Lemme 4.16. *Avec les mêmes notations que ci-dessus,*

$$(\mathrm{Re}p_1(t))^2\leq 2+\mathrm{Re}p_2(t). \tag{17}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz au dernier terme de (16), on a :

$$(\int_0^{+\infty} \mathrm{Re}p_1(t)e^{-t}dt)^2 \le (\int_0^{+\infty} (\mathrm{Re}p_1(t))^2 e^{-t}dt)(\int_0^{+\infty} e^{-t}dt) = \int_0^{+\infty} (\mathrm{Re}p_1(t))^2 e^{-t}dt.$$

Alors par le Lemme 4.16, on a :

$$\begin{aligned}
|a_3| = \mathrm{Re}a_3 &\le -\int_0^{+\infty} \mathrm{Re}p_2(t)e^{-2t}dt + (\int_0^{+\infty} \mathrm{Re}p_1(t)e^{-t}dt)^2 \\
&\le \int_0^{+\infty} 2e^{-2t}dt - \int_0^{+\infty} (\mathrm{Re}p_1(t))^2 e^{-2t}dt + (\int_0^{+\infty} \mathrm{Re}p_1(t)e^{-t}dt)^2 \\
&\le 1 - \int_0^{+\infty} (\mathrm{Re}p_1(t))^2 e^{-2t}dt + \int_0^{+\infty} (\mathrm{Re}p_1(t))^2 e^{-t}dt \\
&= 1 + \int_0^{+\infty} (\mathrm{Re}p_1(t))^2 (e^{-t} - e^{-2t})dt.
\end{aligned}$$

En utilisant $|\mathrm{Re}p_1(t)| \le |p_1(t)| \le 2$, on a :

$$|a_3| \le 1 + \int_0^{+\infty} 4(e^{-t} - e^{-2t})dt = 3.$$

Quand l'égalité a lieu, on a $|\mathrm{Re}p_1(t)| = |p_1(t)| = 2$ et $(\int_0^{+\infty} \mathrm{Re}p_1(t)e^{-t}dt)^2 = \int_0^{+\infty}(\mathrm{Re}p_1(t))^2 e^{-t}dt$ presque partout, *i.e.* $p_1(t) = 2$ ou $p_1(t) = -2$ presque partout. Alors par (14) on a :

$$|a_2| = \left| \int_0^{+\infty} p_1(s)e^{-s}ds \right| = 2.$$

Alors par le cas $n = 2$, $f(z)$ est une rotation de fonction de Koebe. Ceci achève la preuve du cas $n = 3$.

Preuve du Lemme 4.16 : On considère :

$$\psi(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{p(z,t) - 1}{p(z,t) + 1}.$$

Comme $\mathrm{Re}p(z,t) > 0$ et $p(0,t) = 1$, on a $\psi : D \to D$ avec $\psi(0) = \frac{1}{2}p_1(t)$ et $\psi'(0) = \frac{1}{2}p_2(t) - \frac{1}{4}p_1^2(t)$ par un calcul direct. Par le Corollaire 4.2.(1)., on a :

$$\left|\frac{1}{2}p_2(t) - \frac{1}{4}p_1^2(t)\right| \le 1 - \left|\frac{1}{4}p_1^2(t)\right|.$$

Alors on a :

$$1 - \frac{1}{4}|p_1(t)|^2 \ge \left|\frac{1}{2}p_2(t) - \frac{1}{4}p_1^2(t)\right| \ge \left|\mathrm{Re}(\frac{1}{2}p_2(t) - \frac{1}{4}p_1^2(t))\right| \ge -\frac{1}{2}\mathrm{Re}p_2(t) + \frac{1}{4}\mathrm{Re}p_1^2(t).$$

Finalement, on a :

$$2 + \mathrm{Re}p_2(t) \ge \frac{1}{2}\mathrm{Re}p_1^2(t) + \frac{1}{2}|p_1(t)|^2 = (\mathrm{Re}p_1(t))^2.$$

Remerciements

Je tiens à remercier vivement mon encadrant Hugues Auvray pour m'avoir guidé. Comme un étudiant étranger, je ne peux pas bien parler ni écrire en français. Avec sa gentillesse et sa grande patience, il a consacré beaucoup de temps à discuter avec moi, à lire et à corriger mon mémoire, ce qui m'a beaucoup aidé. Je remercie également ma collaboratrice Manon Césaire qui a partagé son travail avec moi. Ça m'a beaucoup aidé.

Références

[1] Albert Baernstein II. Bieberbachs conjecture for tourists. In *Harmonic Analysis*, pages 48–73. Springer, 1982.

[2] Christian Pommerenke and Gerd Jensen. *Univalent functions*, volume 25. Vandenhoeck und Ruprecht, 1975.

[3] Walter Rudin et al. *Principles of mathematical analysis*, volume 3. McGraw-Hill New York, 1964.

[4] Elias M Stein and Rami Shakarchi. *Complex analysis. Princeton Lectures in Analysis, II.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.

[5] Elias M Stein and Rami Shakarchi. *Real analysis : measure theory, integration, and Hilbert spaces.* Princeton University Press, 2009.

[6] Paul Zorn. The bieberbach conjecture. *Mathematics Magazine*, 59(3) :131–148, 1986.