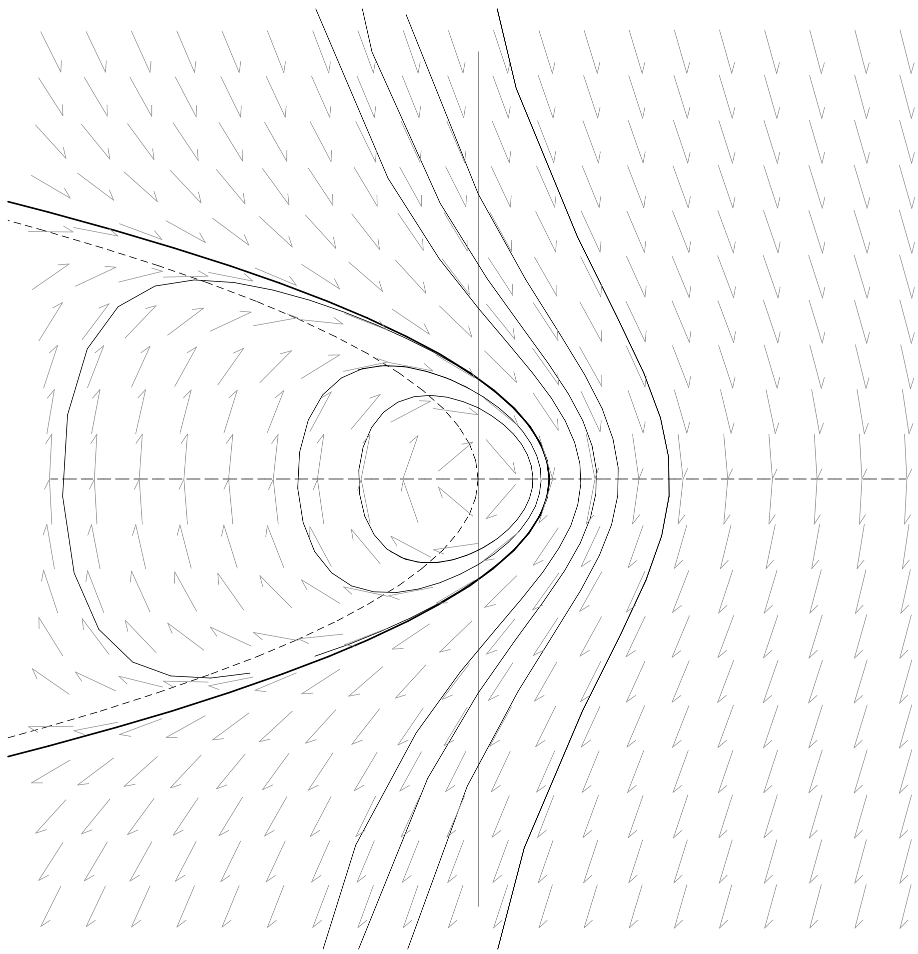
Equations différentielles ordinaires
Etudes qualitatives

Exercices et problèmes corrigés



M304 – L3 MFA

Université Paris-Sud

D. Hulin 2012-13

Table des matières

1. Enoncés

A Equations linéaires

Exercice 1. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme, et $\mathrm{M}_n\mathbb{R}$ de la norme subordonnée. En particulier, on aura $\| \mathrm{Id} \| = 1$.

1. Soient $a, x : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ deux fonctions continues. On suppose que, pour tout $t \geq 0$, on a $x(t) \leq 1 + \int_0^t a(s)\, x(s)\, ds$. Montrer, pour tout $t \geq 0$, l'estimation $x(t) \leq \exp\,(\int_0^t a(s)\, ds)$.
   On pourra introduire la fonction définie par $w(t) = 1 + \int_0^t a(s)\, x(s)\, ds$, et remarquer que w est de classe C^1, et vérifie $w'(t) \leq a(t)\, w(t)$ pour $t \geq 0$.
2. Soit $t \in \mathbb{R} \to A(t) \in \mathrm{M}_n\mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^\infty \| A(s) \| \, ds < \infty$. On désigne par $t \in \mathbb{R} \to R_0^t \in \mathrm{M}_n\mathbb{R}$ la résolvante (relative au temps $t_0 = 0$) de l'équation différentielle (E) $X'(t) = A(t)\, X(t)$ sur $\mathbb{R}^n$.
   (a) Rappeler la valeur de R_0^0, et exprimer la différence $R_0^t - R_0^0$ sous la forme d'une intégrale faisant intervenir A et R.
   (b) Montrer alors que $\sup_{t \in [0,\infty[}(\| R_0^t \|) < \infty$.
   (c) i. En déduire qu'il existe $M \in \mathrm{M}_n\mathbb{R}$ telle que $R_0^t \to M$ lorsque $t \to \infty$.
   ii. Comment cette dernière propriété se traduit-elle sur les solutions de (E) ?

Exercice 2. On s'intéresse au système différentiel (S) $\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & y(t) + e^{-t} \\ y'(t) & = & 2\,x(t) - y(t) \end{array} \right.$.

1. Tracer le portrait de phase du système homogène associé (S_0). On indiquera les orbites remarquables.
2. Déterminer la solution maximale de (S) de condition initiale $(1, 0)$ en $t = 0$.

Exercice 3. Soient $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue, et

$$x''(t) + q(t)\, x(t) = 0 \qquad \text{(E)}$$

l'équation différentielle d'inconnue $x : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2.

1. Discuter le domaine de définition d'une solution maximale de (E).
2. Soit x une solution de (E). Montrer que, si x s'annule, ses zéros sont isolés ou bien x est identiquement nulle.
3. On introduit le système différentiel d'ordre 1 (e) $X'(t) = A(t)\, X(t)$ associé à (E), d'inconnue $t \in J \to X(t) \in \mathbb{R}^2$ de classe C^1.

(a) Rappeler une définition de la résolvante R_s^t de (e) et indiquer ses principales propriétés.

(b) On fixe $t \in \mathbb{R}$.

i. Déterminer la valeur du déterminant $\det R_0^t$.

ii. Montrer que R_0^t possède une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ pour laquelle $|\lambda| \leq 1$.

On suppose désormais que la fonction q est périodique de période 1.

4. Comparer, pour $t \in \mathbb{R}$, R_0^t et R_1^{t+1}.
5. On suppose **dans cette question** que 1 est valeur propre de R_0^1. Montrer que (E) possède une solution non identiquement nulle de période 1.
6. Montrer que (E) possède une solution non identiquement nulle et bornée dans le futur. On pourra utiliser (3b).

Exercice 4. On travaille dans $\mathbb{R}^n$ euclidien. Soient $T > 0$, une application $A : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_n\mathbb{R}$ continue T-périodique, et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. On suppose que, pour tous $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, on a $f(t + T, x) = f(t, x)$, et qu'il existe une fonction continue $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ avec $\lim_{s\to\infty} h(s) = 0$ et telle que $\|f(t, x)\| \leq h(\|x\|)\,\|x\|$.

On considère l'équation différentielle (E) $x'(t) = A(t)\,x(t)+f(t, x(t))$ d'inconnue $t \to x(t) \in \mathbb{R}^n$. Le but de l'exercice est de montrer que (E) admet au moins une solution T-périodique.

1. (a) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $M_\varepsilon > 0$ telle que, pour tous $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, on ait $\|f(t, x)\| \leq \varepsilon\|x\| + M_\varepsilon$.

   (b) Démontrer que les solutions maximales de (E) sont globales.

   Pour $a \in \mathbb{R}^n$, on note $x_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ la solution maximale de (E) de condition initiale $x(0) = a$.
2. Démontrer que x_a est T-périodique si et seulement si $x_a(T) = x_a(0)$.
3. (a) On note (R_s^t) la résolvante de l'équation différentielle (e) $x'(t) = A(t)\,x(t)$. Rappeler une définition, et les principales propriétés, de cette résolvante.

   (b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $x_a(t) = R_0^t(a) + \int_0^t R_s^t\big(f(s, x_a(s))\big)\,ds$.

   (c) Montrer que $\mathrm{Id} - R_0^T$ est inversible si et seulement si, pour toute fonction $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continue et T-périodique, l'équation différentielle $x'(t) = A(t)\,x(t) + B(t)$ possède une unique solution T-périodique.

   On suppose **désormais** que $\mathrm{Id} - R_0^T$ est inversible.
4. Soit $F : a \in \mathbb{R}^n \to (\mathrm{Id} - R_0^T)^{-1}\big[\int_0^T R_s^T\big(f(s, x_a(s))\big)\,ds\big] \in \mathbb{R}^n$.

   (a) Démontrer soigneusement que F est continue.

   (b) i. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute solution maximale x de (E) et tout $t \in [0, T]$, on ait $\|x(t)\| \leq C\,(\|x(0)\| + 1)$.

   ii. En déduire qu'il existe $r > 0$ tel que, pour $a \in \mathbb{R}^n$ avec $\|a\| \leq r$, on ait également $\|F(a)\| \leq r$. On pourra utiliser (1a).

   (c) On rappelle le théorème de Brouwer :

   > toute application continue $F : \overline{B}(0, r) \to \overline{B}(0, r)$ de la boule fermée $\overline{B}(0, r) \subset \mathbb{R}^n$ dans elle-même possède un point fixe.

   En déduire l'existence d'une solution T-périodique de (E).

Exercice 5. On fixe un entier $n \geq 2$, une norme d'algèbre sur $\mathrm{M}_n\mathbb{R}$, et on se donne une application continue $t \in \mathbb{R} \to A(t) \in \mathrm{M_n}\mathbb{R}$. On suppose que $\int_0^\infty \|A(t)\|\, dt < \infty$.

1. Soient $u, v : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ deux fonctions continues positives, et une constante $c > 0$. On suppose que, pour tout $t \geq 0$, on a $u(t) \leq c + \int_0^t u(s)v(s)\, ds$. Montrer que, pour tout $t \geq 0$, on a la majoration $u(t) \leq c \exp(\int_0^t v(s)\, ds)$. On pourra introduire la fonction de classe C^1 définie pour $t \in \mathbb{R}$ par $w(t) = c + \int_0^t u(s)v(s)\, ds$.
2. Soit (E) l'équation différentielle $X'(t) = A(t)\, X(t)$, d'inconnue $t \to X(t) \in \mathbb{R}^n$. On notera $t \in \mathbb{R} \to R_0^t \in \mathrm{M}_n\mathbb{R}$ la résolvante de (E), pour la condition initiale $R_0^0 = \mathrm{Id}$.
   (a) Déduire de 1. l'existence d'une constante $C > 0$ avec, pour tout $t \geq 0$, $\|R_0^t\| \leq C$.
   (b) Montrer alors que R_0^t possède une limite, que l'on notera R_0^∞, lorsque $t \to +\infty$.
   (c) Montrer que $\det R_0^\infty \neq 0$. On pourra écrire une équation différentielle satisfaite pas $w(t) := \det R_0^t$.
   (d) Comment les résultats de (b) et (c) s'interprètent-t-ils pour les solutions de (E) ?
3. On se donne de plus une matrice $M \in \mathrm{M_n}\mathbb{R}$, que l'on suppose diagonalisable à valeurs propres imaginaires pures. On considère alors l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ $X'(t) = (M + A(t))\, X(t)$. On note $t \in \mathbb{R} \to \rho_0^t \in \mathrm{M}_n\mathbb{R}$ la résolvante de $(\mathcal{E})$, pour la condition initiale $\rho_0^0 = \mathrm{Id}$.
   (a) Montrer que $\int_0^\infty \|e^{-tM}\, A(t)\, e^{tM}\|\, dt < \infty$.
   (b) En déduire que $\sigma(t) := e^{-tM} \rho_0^t$ possède une limite quand $t \to +\infty$. On pourra calculer $\sigma'(t)$.
4. Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_0^\infty |a(t)|\, dt < \infty$. On introduit l'équation différentielle (e) $x''(t) + (1 + a(t))x(t) = 0$, d'inconnue $t \to x(t) \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que les solutions maximales de (e) sont globales.
   (b) Soit $t \in \mathbb{R} \to x(t) \in \mathbb{R}$ une solution maximale de (e). Montrer qu'il existe deux constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ telle que $x(t) - c_1 \cos t - c_2 \sin t \to 0$ et $x'(t) + c_1 \sin t - c_2 \cos t \to 0$ lorsque $t \to +\infty$.

Exercice 6. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, et l'équation différentielle (E) $x''(t) + x(t) = f(t)$.

1. Que peut-on dire du domaine de définition des solutions maximales de (E) ? Justifier brièvement votre réponse (on demande une ébauche de preuve, en deux lignes maximum).
2. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E).
3. Soit $t_0 > 0$. A quelle condition sur t_0 l'équation différentielle (E) admet-elle une unique solution x vérifiant les deux conditions "aux limites"

$$x(0) = x(t_0) \text{ et } x'(0) = x'(t_0).$$

B Etudes qualitatives 1D

Exercice 7. 1. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on ait $f(t, 1) \leq 0$ et $f(t, -1) \geq 0$. Montrer que, pour tout $a \in [-1, 1]$, la solution maximale de l'équation (E) $x' = f(t, x)$ de condition initiale $x(0) = a$ est définie sur $[0, \infty[$.

2. On suppose de plus que f est T-périodique par rapport à la première variable. Montrer que (E) possède au moins une solution définie sur $\mathbb{R}$, et T-périodique.

Exercice 8. On étudie l'équation différentielle (E) $x'(t) = f(t, x(t))$, où $f(t,x) = x^3 - \sin(2\pi t)$.

1. (a) Dessiner l'isocline $\mathcal{I}_0$, et indiquer le signe de f dans les régions qu'elle délimite.
   (b) Pour quelles valeurs de $c \in \mathbb{R}$ la fonction constante $h_c(t) \equiv c$ est-elle une sur-solution (resp. une sous-solution) de (E) sur $\mathbb{R}$?
2. Soit $x : I \to \mathbb{R}$ une solution maximale de (E). On note $T_- = \inf I \in [-\infty, \infty[$.
   (a) On veut montrer qu'il existe $t \in I$ avec $x(t) \leq 1$.
      i. On procède par l'absurde, et on suppose que pour tout $t \in I$, on a $x(t) > 1$. Déterminer alors T_-.
      ii. Conclure.
   (b) Montrer de même qu'il existe $t \in I$ pour lequel $x(t) \geq -1$.
   On pourra démontrer que $t \to y(t) := -x(t + 1/2)$ est également solution de (E).
   (c) En déduire que toutes les solutions maximales de (E) sont globales dans le passé.
3. (a) Esquisser le portrait de phase de l'équation différentielle $u'(t) = \frac{1}{4}u^3(t)$.
   (b) Montrer, pour $a \leq b$, l'inégalité $\frac{1}{4}(b-a)^3 \leq b^3 - a^3$.
   (c) Soient x et y deux solutions maximales de (E). Montrer que $\lim\limits_{t \to -\infty} y(t) - x(t) = 0$.
4. (a) Soient y_n et z_n ($n \in \mathbb{N}$) les solutions maximales de (E) de conditions initiales $y_n(n) = 1$ et $z_n(n) = -1$. Montrer que, pour $t \leq n$, on a $y_n(t) = y_0(t-n)$ et $z_n(t) = z_0(t-n)$.
   (b) i. Montrer que (E) admet une solution maximale $w : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ à valeurs dans l'intervalle $[-1, 1]$.
      ii. Montrer qu'une telle solution maximale $w : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ est unique.
      On pourra comparer $w(0)$ à $y_n(0)$ et $z_n(0)$.
   (c) Montrer que cette solution w est périodique de période 1.
5. Soit $x : I \to \mathbb{R}$ une solution maximale de (E) distincte de w. Est-elle globale dans le futur ?
   On pourra chercher à estimer la différence $\delta = x - w$.

Exercice 9. Valeurs propres d'un système de Sturm-Liouville

1. Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, et x la solution maximale de condition initiale $x(0) = 0$ et $x'(0) = 1$ de l'équation différentielle (E) $x''(t) + q(t)\,x(t) = 0$.
   (a) Déterminer le domaine de définition de x.
   (b) Justifier l'existence de deux applications $r : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ et $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, avec $\theta(0) = 0$, et telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on ait
   $$x'(t) = r(t)\,\cos\theta(t) \quad \text{et} \qquad x(t) = r(t)\,\sin\theta(t)\,.$$
   Attention, l'ordre (x', x) est peut-être inhabituel.
   (c) Montrer que θ est solution de l'équation différentielle $\theta'(t) = \cos^2\theta(t) + q(t)\,\sin^2\theta(t)$.

2. Soient $q_1, q_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Pour $i = 1, 2$, soit θ_i la solution maximale de condition initiale $\theta_i(0) = 0$ de l'équation différentielle $(\mathrm{e}_i)\quad \theta'(t) = \cos^2\theta(t) + q_i(t)\, \sin^2\theta(t)$.
   (a) Déterminer les domaines de définition de θ_1 et θ_2.
   (b) On suppose que $q_1 \leq q_2$.
      i. Montrer que, pour tout $t \geq 0$, on a $\theta_1(t) \leq \theta_2(t)$.
      ii. On suppose qu'il existe $T > 0$ pour lequel $\theta_1(T) = \theta_2(T)$. Déduire de (i) que, pour tout $t \in [0, T]$, on a $\theta_1(t) = \theta_2(t)$.
   (c) On suppose que, pour tout $t \in [0, 1]$, $q_1(t) < q_2(t)$. Déduire de (b) que, pour tout $t \in]0, 1]$, on a $\theta_1(t) < \theta_2(t)$. On pourra procéder par l'absurde.
3. Dans cette question, on étudie le cas où la fonction q est constante. On fixe donc un réel k.
   (a) i. Déterminer, en discutant selon k, la solution maximale $x_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_k)\quad x''(t) + k\, x(t) = 0$ de condition initiale $x_k(0) = 0$ et $x_k'(0) = 1$.
      ii. Déterminer, en distinguant selon les valeurs de $k \in \mathbb{R}$, l'image la courbe paramétrée $\gamma_k : t \in \mathbb{R} \to (X(t), Y(t)) := (x_k'(t), x_k(t)) \in \mathbb{R}^2$. Esquisser ces courbes, en indiquant $\gamma_k(0)$ ainsi que le sens de parcours.
      N.B. On prendra garde au fait que la fonction x_k apparaît dans γ_k en seconde coordonnée, et sa dérivée x_k' en première coordonnée ! On pourra évaluer $(x_k')^2 + kx_k^2$.
   (b) On désigne par Θ_k la solution maximale, de condition initiale $\Theta_k(0) = 0$, de l'équation différentielle $\theta'(t) = \cos^2\theta(t) + k\, \sin^2\theta(t)$.
      i. Déduire de (a) que $\lim_{k\to-\infty} \Theta_k(1) = 0$.
      ii. Montrer également que $\lim_{k\to+\infty} \Theta_k(1) = +\infty$.
4. Soit de nouveau $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On veut montrer que l'ensemble $A \subset \mathbb{R}$ des valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'équation $(\mathrm{E}_a)\quad x''(t) + (q(t) + a)\, x(t) = 0$ possède une solution non identiquement nulle satisfaisant la condition "de Dirichlet" $x(0) = x(1) = 0$ est de la forme $A = \{a_n\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$, où $a_n < a_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$.
   (a) *Exemple :* Déterminer l'ensemble A lorsque q est la fonction nulle.
   On revient à q continue quelconque, et on désigne par $t \to \theta(a, t)$ la solution maximale de condition initiale $\theta(a, 0) = 0$ de l'équation $\theta'(t) = \cos^2\theta(t) + (q(t) + a)\, \sin^2\theta(t)$.
   (b) Montrer que l'application $a \in \mathbb{R} \to \theta(a, 1) \in \mathbb{R}$ est continue.
   (c) Montrer que l'application $a \in \mathbb{R} \to \theta(a, 1) \in \mathbb{R}$ est strictement croissante.
   (d) Montrer que $\lim_{a\to-\infty} \theta(a, 1) = 0$ et $\lim_{a\to+\infty} \theta(a, 1) = +\infty$ et conclure.

Exercice 10. On considère l'équation différentielle (E) $x' = f(t, x)$ sur le domaine $J \times U =]0, \infty[\times\mathbb{R}$, où

$$f(t, x) = (t - x)\,(x - \frac{1}{t^2}) \quad \text{pour } t > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

1. (a) Etablir un régionnement de $J \times U$ selon le signe de f.
   (b) Identifier une sur-solution ainsi qu'une sous-solution pour (E).
2. Soient $t_0 \geq 1$, et $x : I \to U$ une solution maximale de condition initiale $1/(t_0)^2 \leq x(t_0) \leq t_0$.
   (a) La solution x est-elle globale dans le futur ?

(b) Montrer que, lorsque t tend vers $\sup I$, $x(t)$ possède une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ que l'on déterminera.

(c) i. On note $h(t) := t - 2/t$. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que h soit une sous-solution de (E) sur l'intervalle $]A, \infty[$.

ii. On suppose que, pour tout $t \in I$ avec $t \geq A$, on a $x(t) < t - 2/t$. Montrer alors qu'il existe $B \geq A$ tel que pour $t \in I$ avec $t \geq B$, on a $x'(t) \geq (3/2)\,(x(t)/t)$.

iii. En déduire qu'il existe $T \in I$ tel que, pour tout $t \in I$ avec $t \geq T$, on ait l'encadrement $t - 2/t \leq x(t) \leq t$.

Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $y_a : I_a \to \mathbb{R}$ la solution maximale de condition initiale $y_a(1) = a$. On étudie certaines de ces solutions dans le futur (question 3), puis dans le passé (question 4).

3. On note $J := \{a \in [0,1] \,/\, \forall t \in I_a \text{ avec } t \geq 1\ ,\ 0 \leq y_a(t) \leq 1/t^2\}$.

(a) i. Montrer que J est non vide et que, pour $a \in J$, y_a est globale dans le futur.

ii. Soient $a, b \in J$ avec $a \leq b$. On note $\Delta(t) := y_b(t) - y_a(t)$ l'écart entre les deux solutions correspondantes. Montrer que, pour $t > 0$ assez grand, on a $\Delta'(t) \geq \frac{t}{2}\,\Delta(t)$.

iii. Montrer que $J = \{a_0\}$ est un singleton, et que $0 < a_0 < 1$.

(b) Soit $a \in]a_0, 1]$. Décrire rapidement le comportement de y_a dans le futur.

(c) Soit $a \in]-\infty, a_0[$.

i. Montrer qu'il existe $T_a \in I_a$ tel que, pour tout $t \in I_a$ avec $t > T_a$, on ait $y_a(t) < 0$.

ii. La solution y_a est-elle globale dans le futur ?
On pourra remarquer que, pour $t \in I_a$ avec $t > T_a$, on a $y_a'(t) \leq -y_a^2(t)$.

4. Soit $a \in]-\infty, 1]$.

(a) On suppose que, pour tout $t \in]\inf I_a, 1]$, on a $y_a(t) < t$.

i. Déterminer $\inf I_a$ et montrer qu'il existe $\ell \leq 0$ telle que $y_a(t) \to \ell$ quand $t \to \inf I_a$.

ii. Montrer, pour $t \in]\inf I_a, 1]$, l'inégalité $|y_a'(t)| \geq 1/t$, et obtenir une contradiction.

(b) Déterminer $\inf I_a$, le tableau de variations de y_a sur $]\inf I_a, 1]$, et montrer que $y_a(t)$ possède une limite que l'on déterminera lorsque $t \to \inf I_a$.

5. (a) On note $\varphi(t) = 2/t^2$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que φ soit une sur-solution sur l'intervalle $]0, C]$.

(b) Soit $\alpha > 0$. On définit, pour $t > \alpha$, $\psi_\alpha(t) = 1/(t-\alpha)^2$. Montrer qu'il existe $\beta_\alpha > \alpha$ tel que ψ_α soit une sur-solution sur l'intervalle $]\alpha, \beta_\alpha]$.

(c) Parmi les solutions maximales $z : I \to \mathbb{R}$ de condition initiale (t_0, z_0), où $t_0 > 0$ et $z_0 > \sup(t_0, 1/(t_0)^2)$, en existe-t-il pour lesquelles :
— $\inf I > 0$;
— $\inf I = 0$ et $z(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$;
— $\inf I = 0$ et $z(t) \to +\infty$ lorsque $t \to 0$.

6. Esquisser, à l'aide des éléments dont vous disposez, les graphes d'une famille significative de solutions maximales de (E). On fera en particulier apparaître les solutions y_1 et y_{a_0} de la question 3.

Exercice 11. On étudie l'équation différentielle (*) $x'(t) = f(t, x(t))$, où

$$f(t,x) = (x - 3t)\,(t^2 + 3t - x)\,.$$

On notera $I_x =]t_{min}(x), t_{max}(x)[$ l'intervalle de définition d'une solution maximale x de (*).

1. Dessiner l'isocline $\mathcal{I}_0$ (on remarquera que $\mathcal{I}_0$ est réunion de deux courbes régulières dont on précisera les positions respectives), et indiquer le signe de f dans les régions qu'elle délimite.
2. (a) Montrer qu'il existe une fonction continue $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que l'on explicitera, et qui possède la propriété suivante :
   Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et une fonction $x : I \to \mathbb{R}^*$ de classe C^1 ne s'annulant pas. La fonction x est solution de (*) $x'(t) = f(t, x(t))$ si et seulement si la fonction $y = 1/x : I \to \mathbb{R}^*$ est solution de (**) $y'(t) = g(t, y(t))$.
   (b) Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique-t-il à l'équation différentielle (**) ? L'énoncer.
   (c) Montrer que les éventuels zéros d'une solution y de (**) sont isolés.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer qu'il existe une unique solution maximale x_α de (*) pour laquelle $t_{max}(x_\alpha) = \alpha$.
   Rappeler le comportement d'une telle solution x_α lorsque $t \to \alpha$, et utiliser la question précédente.
   (b) Obtenir le développement asymptotique $x_\alpha(\alpha + s) = 1/s + (\alpha^2 + 6\alpha)/2 + o(1)$ lorsque $s \to 0^-$.
4. Soit $a \in \mathbb{R}$. On note z_a la solution maximale de (*) de condition initiale $z_a(a) = 3a$.
   (a) Déterminer le tableau de variations de z_a sur l'intervalle $[a, t_{max}(z_a)[$, et montrer que $z_a(t)$ possède une limite $\ell(a) \in [-\infty, 3a]$ lorsque $t \to t_{max}(z_a)$.
   (b) Déterminer $\ell(a)$. On pourra discuter selon que $t_{max}(z_a)$ est fini ou non.
   (c) Résoudre (E) $z'(t) = -z^2(t)$, et tracer le graphe de quelques solutions maximales de (E).
   (d) Déterminer l'ensemble $A = \{a \in \mathbb{R} \mid t_{max}(z_a) < +\infty\}$.
   Soit $a \notin A$. On commencera par montrer qu'il existe $T > 0$ tel que la restriction $z_a : [T, +\infty[\to \mathbb{R}$ soit négative et sous-solution de l'équation différentielle (E) $z'(t) = -z^2(t)$.
5. (a) Déterminer, pour $t \geq 2^{1/3}$ et $x \leq 3t + 1/t$, le signe de $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$.
   (b) Soit $t_0 \geq 2^{1/3}$. Montrer qu'il existe au plus une solution $\xi : [t_0, \infty[\to \mathbb{R}$ de (*) telle que $3t \leq \xi(t) \leq 3t + 1/t$ pour tout $t \geq t_0$.
   Procéder par l'absurde : si $\xi_1, \xi_2 : [t_0, \infty[\to \mathbb{R}$ sont deux telles solutions, avec $\xi_1(t_0) < \xi_2(t_0)$, introduire $\delta := \xi_2 - \xi_1$ et évaluer le signe de $\delta'(t)$.
   (c) Montrer que $u : t \in [3, \infty[\to 3t + 1/t \in \mathbb{R}$ est une sous-solution de (*).
   (d) Montrer qu'il existe une unique solution $\xi : [3, \infty[\to \mathbb{R}$ de (*) telle que $3t \leq \xi(t) \leq 3t + 1/t$ pour tout $t \geq 3$.
   (e) Soient $x : I_x \to \mathbb{R}$ une solution maximale de (*), et $t_0 \in I_x$. On suppose que $t_0 \geq 3$ et que $3t_0 < x(t_0) < \xi(t_0)$. A-t-on $\sup I_x = +\infty$? Déterminer le tableau de variations de x sur $[t_0, \sup I_x[$.
6. On revient aux solutions z_a introduites dans la question 4, dont on conserve les notations.
   (a) On étudie l'application $a \in A \to t_{max}(z_a) \in \mathbb{R}$.
      i. Montrer que l'application $a \in A \to t_{max}(z_a) \in \mathbb{R}$ est croissante (au sens large).

ii. Soit $x : I_x =]t_{min}(x), t_{max}(x)[\to \mathbb{R}$ une solution maximale de (*). On suppose que $t_{max}(x) < \infty$. Montrer qu'il existe un unique instant $s \in I_x$ pour lequel $x(s) = 3s$.
On rappelle que $x(t) \to -\infty$ lorsque $t \to t_{max}(x)$ (question 3). Pour l'existence de s, on pourra procéder par l'absurde et s'intéresser au comportement de x lorsque $t \to t_{min}(x)$.

iii. En déduire que l'application $\mathcal{T} : a \in A \to t_{max}(z_a) \in \mathbb{R}$ est bijective.

(b) On veut montrer que la solution maximale z_0, de condition initiale $z_0(0) = 0$, satisfait $t_{min}(z_0) > -\infty$.

i. Montrer que la fonction définie par $w(t) = t^4$ est une sur-solution de (*) sur $[-1, 0]$.

ii. Montrer que $-1 \notin I_{z_0}$, ou bien que $z_0(-1) \geq 1$.

iii. Montrer que $\inf I_{z_0} \geq -2$. On pourra remarquer que, pour $t \in I_{z_0} \cap [-3, 0]$, on a $z_0'(t) \leq -z_0^2(t)$.

7. Esquisser, à l'aide des éléments dont vous disposez, les graphes d'une famille significative de solutions maximales de (*).

C Equations autonomes

Exercice 12. Champ de gradient.

On travaille dans $\mathbb{R}^n$ euclidien rapporté aux coordonnées $(x_1, \cdots, x_n)$, on se donne une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ et on considère l'équation différentielle (E) $m' = X(m)$ associée au champ de vecteurs

$$X(m) = -(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n})\ (m) = -\mathrm{grad}_m f\ .$$

1. (a) Déterminer les solutions constantes de (E).

(b) Montrer que f décroît strictement le long des solutions non constantes de (E).

(c) Déterminer les solutions périodiques de (E).

2. Soit m_0 un point critique de f. On suppose que m_0 est un minimum isolé de f : il existe un voisinage V de m_0 dans lequel m_0 est le seul point critique, et tel que pour $p \in V$ avec $p \neq m_0$, on a $f(m_0) < f(p)$. Montrer alors que m_0 est asymptotiquement stable dans le futur.

3. On suppose désormais que, pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}(]-\infty, c]) \subset \mathbb{R}^n$ est compact.

(a) Montrer qu'une solution maximale est globale dans le futur.

(b) Soit $t \to m(t)$ une solution maximale. On dit qu'un point $z \in \mathbb{R}^n$ est un point limite (dans le futur) de cette solution si il existe une suite d'instants $t_k \to +\infty$ tels que $\lim_{k\to\infty} m(t_k) = z$. Montrer alors que z est un point d'équilibre de (E). (On pourra comparer, pour $s > 0$, les valeurs de f en z et en $\varphi_s(z)$, où φ désigne le flot de X.)

(c) On suppose de plus que la fonction f possède un nombre fini de points critiques $\{p_1, \cdots p_k\}$.

i. Soient $r > 0$, et $U = \cup_{i=1..k} B(p_i, r)$. Montrer que toute solution maximale de (E) rentre définitivement, dans le futur, dans l'ouvert U.

ii. Montrer alors que toute solution maximale de (E) converge, dans le futur, vers l'un des p_i ($1 \leq i \leq k$). (On pourra choisir r de sorte que les boules ouvertes $B(p_i, r)$ soient deux à deux disjointes.)

Exercice 13. Système de Lorenz On fixe un paramètre $k \in \mathbb{R}$, et on considère le système différentiel autonome sur $\mathbb{R}^3$:

$$(E) \begin{cases} x' &= -x+y \\ y' &= kx-y-xz \\ z' &= -z+xy\,. \end{cases}$$

1. (a) Déterminer le linéarisé A du système en l'origine, et ses valeurs propres.
   (b) Pour quelles valeurs de k peut-on déduire de cette étude que l'origine est, ou non, un point d'équilibre asymptotiquement stable dans le futur ?
2. On suppose désormais que $k = 1$.
   (a) Déterminer les points stationnaires de (E).
   (b) On introduit la fonction $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $h(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Soit $t \to \varphi_t(m)$ une solution de (E). Etudier les variations de la fonction $t \to h(\varphi_t(m))$.
   (c) Discuter, en fonction du point $m \in \mathbb{R}^3$, le comportement dans le futur de la solution maximale $t \to \varphi_t(m)$ de condition initiale $\varphi_0(m) = m$.

Exercice 14. 1. Résoudre, en justifiant très soigneusement les calculs, le système différentiel

$$\begin{cases} x' &= x-y(x^2+y^2) \\ y' &= y+x(x^2+y^2) \end{cases}.$$

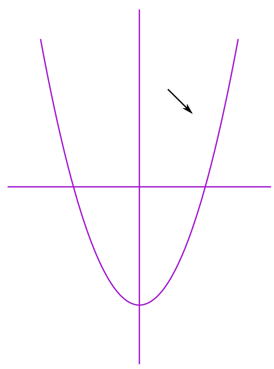
2. Tracer son portrait de phase. On veillera à la précision du tracé au voisinage de l'origine.

Exercice 15. .

On va étudier une partie du portrait de phase du système différentiel (E) associé sur $\mathbb{R}^2$ au champ de vecteurs :

$$X(x,y) = (\ y\ ;\ x(x^2-1-y)\ )\,.$$

Pour $m \in \mathbb{R}^2$, on notera $t \in I_m \to \varphi_t(m) = (x_m(t), y_m(t)) \in \mathbb{R}^2$ la solution maximale de (E) de condition initiale $\varphi_0(m) = m$.



1. (a) Compléter le dessin ci-dessus en indiquant les isoclines $\mathcal{I}_0$ et $\mathcal{I}_\infty$, et l'allure du champ (régionnement).
   (b) Déterminer les points stationnaires, ainsi que la nature du champ linéarisé en chacun des points stationnaires.
2. (a) Montrer qu'il existe deux paraboles d'axe Oy (d'équation $y = ax^2+b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ à déterminer) qui sont réunion d'orbites que l'on décrira.
   (b) Citer le théorème du cours qui décrit l'allure du portrait de phase au voisinage du point $Q = (1,0)$. Préciser les orbites remarquables. Faire un dessin ; on indiquera le sens de parcours des orbites.
3. Mettre en évidence une symétrie du champ et décrire son effet sur les solutions de (E).

4. Soit le domaine $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (1/2)(x^2-1) < y < 1-x^2\}$.
   On note $A_1 = A \cap \{x > 0\,,\ y > 0\}$ et $A_2 = A \cap \{x > 0\,,\ y < 0\}$.
   (a) Compléter le dessin de la question (1.a) en indiquant les paraboles $\mathcal{P} = \{y = x^2 - 1\}$, $\mathcal{P}_1 = \{y = 1 - x^2\}$ et $\mathcal{P}_2 = \{2y = x^2 - 1\}$, ainsi que les domaines A, A_1 et A_2.
   (b) Déterminer l'intervalle I_m lorsque $m \in A$.
   Pour simplifier la rédaction, on suppose dans la suite de cette question que $m \in A_1$.
   (c) Peut-on avoir $\varphi_t(m) \in A_1$ pour tout $t \geq 0$?
   (d) Montrer qu'il existe $t_1 > 0$ (dépendant de $m \in A_1$) avec $x_m(t_1) = 0$ et tel que $x_m(t) > 0$ pour $t \in [0, t_1[$.
   (e) Montrer qu'il existe $t_2 < 0$ (dépendant de $m \in A_1$) avec $x_m(t_2) = 0$ et tel que $x_m(t) > 0$ pour $t \in]t_2, 0]$. On pourra noter par la suite $p_1 = \varphi_{t_1}(m)$ et $p_2 = \varphi_{t_2}(m)$.
   (f) Démontrer que la solution $t \to \varphi_t(m)$ est périodique, et exprimer sa période en fonction de t_1 et t_2.
5. On introduit le domaine $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y > 1 - x^2\,,\ 2\,y > x^2 - 1\}$. Soit $m \in B$.
   (a) Dessiner B et montrer que, pour tout $t \in I_m$, on a $\varphi_t(m) \in B$.
   (b) Montrer que, pour tout $t \in I_m$, on a $x'_m(t) > 0$ et $\left|\dfrac{y'_m(t)}{x'_m(t)}\right| \leq 3\,|x_m(t)|$.
   (c) i. Démontrer que l'orbite de m est le graphe $\{(x, v_m(x))\,,\ x \in J_m\}$ d'une application $v_m : J_m \to]0,\infty[$ de classe C^1 définie sur un intervalle ouvert $J_m \subset \mathbb{R}$, et exprimer la dérivée $v'_m(x)$ en fonction de x et de $v_m(x)$ $(x \in J_m)$.
   ii. Montrer que $J_m = \mathbb{R}$.
   (d) i. Montrer, pour $x > 0$ assez grand, l'inégalité $v_m(x) \leq 2x^2$.
   ii. On définit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $u(x) = (x^2-1)/2$. Montrer que la différence $\delta := v_m - u$ vérifie, pour $x > 0$ assez grand, la relation $-x\,\delta'(x) \geq \delta(x)$.
   On remarquera que u et v_m sont solutions de l'équation différentielle (e) $u'(x) = \dfrac{x(x^2-1)}{u} - x$.
   iii. Montrer que l'orbite de m est, dans le futur, asymptote à une parabole dont on déterminera l'équation.
6. Achever l'étude du portrait de phase de (E). A ce stade du problème, on pourra se contenter de justifications sommaires.

Exercice 16. Pour $m \in \mathbb{R}^2$, on note $t \in I_m \to \varphi_t(m) = (x_m(t), y_m(t)) \in \mathbb{R}^2$ la solution maximale de condition initiale $\varphi_0(m) = m$ du système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x^2 - 3x + 1 - y^2 \\ y' & = & 2xy\,. \end{array} \right.$$

1. Montrer que le demi-plan $\Omega = \{(x,y)\,,\ y > 0\}$ est une zone piège dans le futur et le passé.
2. On introduit la fonction $L : (x,y) \in \Omega \to \dfrac{x^2+y^2+1}{2y} \in [0,\infty[$.
   (a) Soit $c > 1$. Déterminer les ensembles de niveau $\mathcal{E}(c) = \{(x,y) \in \Omega\,,\ L(x,y) = c\}$ et $\mathcal{E}(1) = \{(x,y) \in \Omega\,,\ L(x,y) = 1\}$, et les dessiner.

(b) On fixe $m \in \Omega$, et on note $u(t) = L(\varphi_t(m))$. Montrer, pour $t \in I_m$, l'encadrement $-6\,u(t) \le u'(t) \le 0$. (On pourra commencer par montrer que $u'(t) = -3\,x_m^2(t)/y_m(t)$.)

3. (a) Rappeler la définition d'une fonction de Lyapunov.
   (b) Montrer que $L : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction de Lyapunov sur Ω pour le champ X au point $Q = (0, 1)$.
4. (a) Discuter, selon la condition initiale $m \in \Omega$, le comportement de $\varphi_t(m)$ lorsque $t \to \sup I_m$ ainsi que $\sup I_m$.
   (b) Soit $m \in \Omega$. Déterminer $\inf I_m$.

Exercice 17. A. On étudie le système (F) $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & y \\ y' & = & -y^3 - x \end{array}\right.$ associé au champ de vecteurs $Y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer le linéarisé de Y en l'origine, et sa nature. Ce linéarisé permet-il de décider si l'origine est un point stationnaire asymptotiquement stable dans le futur (ou dans le passé) ?
2. Soit $m \in \mathbb{R}^2$, et $t \in I_m \to \varphi_t(m)$ la solution maximale de (F) de condition initiale $\varphi_0(m) = m$. Discuter, en fonction de m, la valeur de $\sup I_m$ ainsi que le comportement de $\varphi_t(m)$ lorsque $t \to \sup I_m$.
   On pourra chercher une fonction de Lyapunov très simple pour le champ Y en l'origine.

B. On étudie le système (E) $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & y \\ y' & = & -y^2 - x \end{array}\right.$ associé au champ de vecteurs $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

1. (a) Montrer qu'il existe une parabole $\mathcal{P} = \{(a\,y^2 + b, y) \,/\, y \in \mathbb{R}\}$ d'axe Ox qui est réunion d'orbites que l'on déterminera.
   (b) Faire un schéma indiquant $\mathcal{P}$, les isoclines $\mathcal{I}_0$ et $\mathcal{I}_\infty$, et l'allure du champ (régionnement).
   (c) Mettre en évidence une symétrie du champ, et décrire son effet sur les solutions de (E).
2. Le domaine $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,, y > 0\}$ est-il une zone piège dans le futur ? dans le passé ?
3. (a) Déterminer la solution maximale $w_a : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (e) $w'(x) = -2w(x) - 2x$, de condition initiale $w_a(0) = a$ ($a \in \mathbb{R}$).
   (b) Etudier w_a (tableau de variations, signe) et esquisser son graphe lorsque $0 < a < 1/2$, $a = 1/2$ et $a > 1/2$. (On ne cherchera pas à déterminer explicitement les zéros de w_a).
4. (a) Soient $m \in \mathbb{R}^2$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $t \in I \to \varphi_t(m) = (x_t(m), y_t(m)) \in \Omega$ une solution (pas forcément maximale) tracée dans Ω.
      i. Montrer que la portion d'orbite $\gamma = \{\varphi_t(m)\,,\ t \in I\}$ est le graphe $\{(x, v(x)), x \in J\}$ d'une application $v : J \to]0, \infty[$ de classe C^1.
      ii. Pour $x \in J$, exprimer $v'(x)$ en fonction de x et $v(x)$.
   (b) Soit $v : J \to]0, \infty[$ une application de classe C^1, où J est un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que le graphe de v est inclus dans une orbite de X si et seulement si $w := v^2$ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 que l'on précisera.
   (c) i. Compléter le schéma de (1.b) en esquissant le portrait de phase de (E). On pourra commencer par tracer les portions d'orbites contenues dans Ω.
      ii. Préciser les valeurs de $c > 0$ pour lesquelles une solution passant par $(0, c) \in \Omega$ est périodique.

5. Soit l'équation différentielle du second ordre $(\mathcal{E})$ $x''(t) + (x'(t))^2 + x(t) = 0$.
   (a) Montrer que toute solution maximale de $(\mathcal{E})$ s'annule au moins une fois.
   (b) Soit $x_c : I_c \to \mathbb{R}$ la solution maximale de $(\mathcal{E})$ de condition initiale $x(0) = 0$ et $x'(0) = c$ ($c \in \mathbb{R}$). Pour quelles valeurs de c la solution x_c est-elle périodique ? Sinon, déterminer le comportement de $x_c(t)$ lorsque $t \to \sup I_c$ et $t \to \inf I_c$.
   On ne cherchera pas à déterminer la période de x_c (resp. l'intervalle I_c).

Exercice 18. On étudie le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^2$ par $X(x, y) = (x^2 - 2x + 1 - y, xy)$.

1. Déterminer les isoclines $\mathcal{I}_0$ et $\mathcal{I}_\infty$ ainsi que les points singuliers du champ X, et les dessiner.
2. Montrer que l'ouvert $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y > 0\}$ est une zone piège dans le futur et dans le passé.
3. On définit $L : (x, y) \in U \to \dfrac{x^2 + (y-1)^2}{y^2} \in \mathbb{R}$.
   (a) Rappeler la définition d'une fonction de Lyapunov.
   (b) Montrer que L est une fonction de Lyapunov pour X au point $P = (0, 1)$.
   (c) Discuter la nature des lignes de niveau $\ell_c = \{(x, y) \in U \ / \ L(x, y) = c\}$ en distinguant selon que $0 < c < 1$, $c = 1$ ou $c > 1$. Les esquisser.
4. (a) Montrer que P est un point d'équilibre asymptotiquement stable dans le futur.
   (b) Soient $m_0 \in U$ tel que $L(m_0) < 1$, et $t \in I \to m(t) \in U$ la solution maximale de l'équation différentielle $m'(t) = X(m(t))$ de condition initiale $m(0) = m_0$.
      i. Déterminer $\sup I$.
      ii. Démontrer que $m(t) \to P$ lorsque $t \to \sup I$. On pourra procéder par l'absurde, et montrer qu'il existe une suite d'instants $t_n \to \sup I$ et un point $R \in U$ distinct de P tels que $m(t_n) \to R$.

Exercice 19. On étudie le système différentiel autonome (E) associé sur $\mathbb{R}^2$ au champ de vecteurs :

$$X(x, y) = (\ x^2 - y\ ;\ (x + x^3)(y - 1)\ )\,.$$

Pour $m \in \mathbb{R}^2$, on notera $t \in I_m \to \varphi_m(t) = (x_m(t), y_m(t)) \in \mathbb{R}^2$ la solution maximale de (E) de condition initiale $\varphi_0(m) = m$.

1. (a) Indiquer sur un même dessin $\mathcal{I}_0$ et $\mathcal{I}_\infty$, et l'allure du champ (régionnement).
   (b) Décrire l'effet de la symétrie $s : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (-x, y) \in \mathbb{R}^2$ sur le portrait de phase.
   (c) Montrer qu'il existe une droite qui est réunion d'orbites que l'on déterminera.
2. Déterminer parmi les points singuliers $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (-1, 1)$ et $Q = (0, 0)$ ceux qui sont stables, ou bien asymptotiquement stables, dans le passé ou dans le futur.
3. On introduit la région $A = \{x < 0\ ,\ x^2 < y < 1\}$ (la dessiner).
   (a) Montrer que A est une zone piège dans le futur.
   (b) Soit $m \in A$. Déterminer $\sup I_m$ ainsi que le comportement de $\varphi_m(t)$ lorsque $t \to \sup I_m$.
   (c) Montrer qu'il existe une unique orbite entièrement tracée dans A.

4. Soient $B = \{x > 0 \;,\; 1 < y < x^2\}$ et $m \in B$. On veut montrer que $\varphi_m(t)$ sort de B dans le futur. On procède par l'absurde, et on suppose que, pour tout $t \in I_m$ avec $t > 0$, on a encore $\varphi_m(t) \in B$.
   (a) Montrer qu'il existe alors $a \in]1, +\infty]$, et une fonction $h :]1, a[\to]1, \infty[$ de classe C^1 tels que l'orbite $\mathcal{O}_m = \{\varphi_m(t)\,,\; t \in I_m\}$ soit le graphe $\{(x, h(x))\,,\; x \in]1, a[\,\}$ de h.
   (b) Montrer que $a = +\infty$. On pourra procéder par l'absurde.
   (c) Déterminer, pour $x > 1$, la dérivée $h'(x)$ en fonction de x et de $h(x)$.
   (d) Montrer, pour $x > 1$, la minoration $h'(x) \geq x\,(h(x) - 1)$.
   (e) Conclure.
5. On introduit les régions $C = \{x < 0 \;,\; 1 < y\}$, $C_1 = \{x < 0 \;,\; 1 < y < x^2\} \subset C$ et $C_2 := C \setminus C_1$.
   (a) Dessiner C_1 et C_2 .
   (b) On suppose que $m \in C_1$. Déterminer $\sup I_m$ ainsi que le comportement de $\varphi_t(m)$ lorsque $t \to \sup I_m$.
   (c) Même question lorsque maintenant $m \in C_2$.
   (d) Montrer qu'une orbite issue de $D = \{x > 0 \;,\; y > \sup(1, x^2)\}$ rencontre C_2 dans le futur. On pourra fixer $m_0 = (x_0, y_0) \in D$ et raisonner comme dans la question 4.
6. Décrire le bassin d'attraction $\Omega^+_{P_2}$ de P_2 dans le futur : on montrera qu'il existe une fonction continue, soit $k :]-\infty, \infty[\to \mathbb{R}$, telle que $\Omega^+_{P_2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/ y > k(x)\}$.
7. Dessiner le portrait de phase de X. On veillera à faire apparaître les orbites remarquables.

Exercice 20. Ensemble limite.
On travaille dans $\mathbb{R}^n$ normé. On note $\overline{A}$ l'adhérence d'une partie A de $\mathbb{R}^n$, et $B(p, r)$ la boule de centre p et de rayon r.

Soient $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs de classe C^1 et $m \in \mathbb{R}^n$. On note $t \in I_m \to \varphi_t(m) \in \mathbb{R}^n$ la solution maximale de l'équation différentielle (E) $\;x'(t) = X(x(t))$ de condition initiale $\varphi_0(m) = m$, et on introduit l'ensemble limite de m dans le futur, soit $\omega(m)$, défini comme

$$\omega(m) := \bigcap_{t \in I_m\,,\, t \geq 0} \overline{\{\varphi_s(m) \,|\, s \in I_m,\, s \geq t\}}\,.$$

1. (a) Soit $p \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $p \in \omega(m)$ si et seulement si il existe une suite d'instants $t_k \in I_m$ avec $t_k \to \sup I_m$, et tels que $\varphi_{t_k}(m) \to p$ lorsque $k \to \infty$.
   (b) Montrer que $\omega(m)$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$.
   (c) On suppose que $\omega(m)$ n'est pas vide. Déterminer alors $\sup I_m$. Justifier votre réponse.
2. Exemple. Esquisser le portrait de phase du champ de vecteurs $X_1(x, y) = (3y, x - 2y)$ sur $\mathbb{R}^2$ et discuter, en fonction du point m, l'ensemble limite $\omega(m)$.
3. On revient à notre champ $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. Soient $m \in \mathbb{R}^n$, et $p \in \omega(m)$.
   (a) i. Rappeler la définition du flot φ de X, et ses principales propriétés.
       ii. En déduire que l'orbite $\mathcal{O}(p) = \{\varphi_s(p) \,|\, s \in I_p\}$ de p est incluse dans $\omega(m)$.
       iii. Montrer alors l'inclusion des ensembles limites $\omega(p) \subset \omega(m)$.

iv. On suppose que $\omega(m) = \{p\}$ est un singleton. Qu'en déduit-on pour $X(p)$?

(b) On suppose que p est isolé dans $\omega(m)$, i.e. qu'il existe $\varepsilon > 0$ avec $\overline{B(p,\varepsilon)} \cap \omega(m) = \{p\}$.

i. Montrer que $\omega(m) = \{p\}$. On pourra procéder par l'absurde, et montrer qu'il existe une suite d'instants $u_k \to +\infty$ pour lesquels $\varphi_{u_k}(m) \in \overline{B(p,\varepsilon)} \setminus B(p,\varepsilon/2)$.

ii. Montrer enfin que l'orbite de m converge vers p dans le futur, i.e. $\lim_{s\to\infty} \varphi_s(m) = p$. On pourra de nouveau procéder par l'absurde.

Exercice 21. On étudie le champ de vecteurs défini par sur $\mathbb{R}^2$ par $X(x,y) = (x^2+y^2-1, -x)$.

1. Soit $m \in \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe une unique solution maximale de l'équation différentielle associée, de condition initiale m en $t = 0$. On la note $t \in I_m \to \xi_m(t) = (x_m(t), y_m(t)) \in \mathbb{R}^2$.

2. (a) Faire un schéma indiquant les isoclines $\mathcal{I}_0$ et $\mathcal{I}_\infty$ et l'allure du champ (régionnement), et déterminer les points stationnaires de X.

(b) Démontrer que l'application $s : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to (-x,y) \in \mathbb{R}^2$ préserve globalement le portrait de phase de X. Préserve-t-elle le sens de parcours des orbites ?

3. (a) Déterminer les linéarisés de X en $P = (0,1)$ et en $Q = (0,-1)$. Indiquer la nature et tracer le portrait de phase de chacun de ces deux champs linéarisés.

(b) Peut-on en déduire l'allure du portrait de phase de X au voisinage de Q ? Si oui, décrire ce portrait et l'esquisser. On déterminera les espaces propres de $D_Q X$.

(c) Le résultat de 3.a permet-il de savoir si le point P est stable dans le futur ?

4. Soient $A = \{(x,y) \,|\, x^2+y^2 > 1,\, x > 0,\, y < 0\}$ et $B = \{(x,y) \,|\, x^2+y^2 > 1,\, x > 0,\, y > 0\}$. Compléter le dessin de 2.a en indiquant les domaines A et B.

5. Soit $R = (1,0)$. On introduit la fonction définie, pour $t \in I_R$, par $f(t) = x_R^2(t) + y_R^2(t) - 1$.

(a) Déterminer $f'(0)$ et $f''(0)$.

(b) Montrer que pour $t > 0$ petit on a $\xi_R(t) \in A$, et que pour $t < 0$ petit on a $\xi_R(t) \in B$.

6. (a) Soit $p \in A$. Démontrer que l'orbite de p reste confinée, dans le futur, dans le domaine A : pour $t \in I_p$ avec $t \geq 0$, on a $\xi_p(t) \in A$.

(b) Montrer qu'il existe une unique orbite, entièrement tracée dans A, et contenant le point Q dans son adhérence. On notera γ_1 cette orbite.

(c) Montrer que γ_1 est le graphe $\{(x, h(x))\}$ d'une application $h :]0,\alpha[\to]\beta,-1[$ bijective et de classe C^1 (avec $\alpha \in \mathbb{R} \cup +\infty$ et $\beta \in \mathbb{R} \cup -\infty$) et dont on déterminera, pour tout $x \in]0,\alpha[$, la dérivée $h'(x)$ en fonction de x et de $h(x)$.
On pourra choisir un point $m \in \gamma_1$, et commencer par étudier l'application $t \in I_m \to x_m(t) \in \mathbb{R}$.

(d) Peut-on avoir α et β tous deux finis ?

(e) Déterminer alors les valeurs de α et β, et compléter le dessin de 4. en y indiquant γ_1.

(f) Soient $m \in \gamma_1$, et $t \in I_m \to \xi_m(t) \in \mathbb{R}^2$ la solution correspondante. Cette solution est-elle globale dans le passé ? Globale dans le futur ?
On pourra remarquer que, pour t proche de $\sup I_m$, on a $x'_m(t) \geq x_m^2(t)$.

7. (a) Démontrer qu'il existe une unique orbite convergeant vers Q dans le passé et rencontrant le demi-disque $D_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 < 1\,,\, x < 0\}$. On la note γ_2.

(b) Montrer que γ_2 contient un point $m_2 = (x_2, y_2)$ avec $x_2 < 0$ et $x_2^2 + y_2^2 = 1$.
On pourra procéder par l'absurde, et supposer que γ_2 est entièrement tracée dans D_-.

(c) On admet que γ_2 contient un point N de coordonnées $(0, n)$ avec $n > 1$. Montrer que γ_2 converge vers Q dans le futur. Dessiner γ_2. (Le résultat admis se démontre avec les outils de 6.)

(d) Montrer alors que l'orbite $\gamma(q)$ de tout point $q = (0, y_q)$ avec $1 < y_q < n$ est périodique.

8. Esquisser le portrait de phase de X. On fera moins apparaître les orbites γ_1 et γ_2, l'orbite du point R, une orbite périodique, ainsi que les isoclines $\mathcal{I}_0$ et $\mathcal{I}_\infty$.
On admettra (comme en 7.c) que l'orbite du point R croise l'axe Oy dans le passé.

Exercice 22. Linéarisation en dimension 2 : foyers, soleils, centres.

1. Un champ de vecteurs linéaire sur $\mathbb{R}^2$, soit $Y(m) = Am$, est un foyer attractif lorsque A possède deux valeurs propres conjuguées $a \pm ib$ avec $a < 0$ et $b \neq 0$. Lorsque $A = a\,\mathrm{Id}$ avec $a < 0$, c'est un soleil (attractif). Dessiner les portraits de phase correspondants.

   Soient maintenant $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un champ C^1 avec $X(0) = 0$, et $A = D_0X$.

2. On suppose que le linéarisé A est un foyer attractif. Montrer (sans utiliser le théorème de Lyapunov) que l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable dans le futur, et qu'une orbite convergeant vers 0 spirale une infinité de fois autour de l'origine. Indication : on suggère, dans un repère convenable, de passer en coordonnées polaires.

3. On suppose que le linéarisé A est un soleil attractif.

   (a) Décrire les orbites de X près de l'origine lorsque X est de classe C^2.

   (b) Etudier par contre les orbites du champ $Z(x, y) = -\binom{x}{y} + \frac{1}{\log(x^2+y^2)}\binom{-y}{x}$.

4. On suppose que le linéarisé A est un centre (il a deux valeurs propres imaginaires pures).

   (a) Comparer, pour les deux exemples suivants, les trajectoires de X et de son linéarisé :

$$X_1(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} - (x^2 + y^2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad X_2(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} - e^{-\frac{1}{(x^2+y^2)}} \sin \frac{1}{(x^2 + y^2)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

   (b) Montrer cependant que, si une orbite de X converge vers $(0, 0)$, alors elle fait une infinité de fois le tour de l'origine.

Exercice 23. En s'inspirant des exercices précédents, entreprendre l'étude hypnotisante du champ de vecteurs dont le portrait figure sur la couverture, et qui est défini sur $\mathbb{R}^2$ par

$$X(x, y) = (x(1 - y), x^2 - y)\,.$$

On commencera par un régionnement et l'étude des points singuliers. On montrera ensuite que le point $P_1 = (1, 1)$ est asymptotiquement stable dans le futur, et que son bassin d'attraction est le demi-plan $\{x > 0\}$.

On pourra éventuellement utiliser l'exercice 22. On pourra aussi penser à la formule de Green pour montrer que ce champ n'admet pas d'orbite périodique non stationnaire.

2. Corrigés

A Equations linéaires

Corrigé de l'exercice 1. 1. On a $w'(t) = a(t)\,x(t) \le a(t)\,w(t)$, par hypothèse et puisque $a \ge 0$. On dérive alors $\frac{d}{dt}\,[\,w(t)\ exp(-\int_0^t a(s)\,ds)\,] = [w'(t) - a(t)\,w(t)]\ exp(-\int_0^t a(s)\,ds) \le 0$. On obtient finalement, pour $t \ge 0$, l'estimation $x(t) \le w(t) \le w(0)\ exp(\int_0^t a(s)\,ds)$, avec $w(0) = 1$.

2. (a) La résolvante $t \in \mathbb{R} \to R_0^t \in \mathrm{M}_n\mathbb{R}$ vérifie $R_0^0 = \mathrm{Id}$, et $\frac{d}{dt}R_0^t = A(t) \circ R_0^t$. On obtient donc $R_0^t = \mathrm{Id} + \int_0^t A(s) \circ R_0^s\,ds$.

   (b) D'après la question précédente, $\| R_0^t \| \le \| \mathrm{Id} + \int_0^t A(s) \circ R_0^s\,ds \|$. Puisque la norme est sous-multiplicative, l'inégalité triangulaire donne $\| R_0^t \| \le 1 + \int_0^t a(s) \| R_0^s \|\ ds$, où l'on a posé $a(s) = \| A(s) \|$. On conclut avec la question 1, puisque a est intégrable sur $[0, \infty[$.

   (c) i. On revient à l'expression $R_0^t = \mathrm{Id} + \int_0^t A(s) \circ R_0^s\,ds$. Le critère de Cauchy est satisfait, puisque $\| A(s) \circ R_0^s \| \le \| A(s) \|\ \| R_0^s \|$, le premier facteur étant intégrable, et le second borné, sur $[0, \infty[$.

   ii. Chaque solution de (E) est de la forme $t \to R_0^t X_0$ pour $X_0 \in \mathbb{R}^n$, et possède donc une limite en $+\infty$.

Corrigé de l'exercice 2. 1. Les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ sont -2 et 1 ; il s'agit donc d'un col. Les orbites remarquables sont portées par les axes propres, respectivement dirigés par les vecteurs $v_{-2} = (1, -2)$ et $v_1 = (1, 1)$. On trace le portrait de phase en faisant apparaître entre autres les orbites remarquables (l'origine, et les quatre demi-droites propres). Les sens de parcours des orbites doivent être cohérents !

2. Une base de l'espace des solutions du système homogène est donnée par $x_1 : t \in \mathbb{R} \to e^t v_1$ et $x_2 : t \in \mathbb{R} \to e^{-2t} v_2$. On peut utiliser la méthode de variation de la constante et chercher une solution de la forme $x(t) = a(t)e^{-2t}v_2 + b(t)e^t v_1$ $(a, b \in C^1)$. Comme -1 n'est pas valeur propre de A, on peut aussi chercher directement une solution particulière $t \to (\alpha e^{-t}, \beta e^{-t})$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$. La solution cherchée est $t \in \mathbb{R} \to (e^t, e^t - e^{-t}) \in \mathbb{R}^2$.

Corrigé de l'exercice 3. 1. L'équation différentielle (E) est linéaire donc ses solutions maximales sont globales, ici définies sur $\mathbb{R}$.

2. Soient x une solution, et $t_0 \in \mathbb{R}$ pour lequel $x(t_0) = 0$. Si $x'(t_0) = 0$, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que x est la solution identiquement nulle. Sinon, ce zéro de x est isolé (il existe une voisinage de t_0 sur lequel x ne s'annule que en t_0). Contredire le fait que t_0 est isolé ne consiste pas à supposer que x s'annule sur un voisinage de t_0.
3. Pour $t \in \mathbb{R}$, $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & 0 \end{pmatrix}$. En particulier, $A(t)$ est de trace nulle.
   (a) Question de cours.
   (b) i. Notons $w(t) = \det R_0^t$ (c'est le wronskien). Puisque chaque matrice $A(t)$ est de trace nulle, $w(t)$ est constant, donc égal à $\det R_0^0 = 1$.
   ii. Le déterminant étant produit des valeurs propres, l'une d'entre elle au moins est donc de module au plus 1. Les matrices de déterminant 1 (groupe spécial linéaire) conservent le volume. Mais ce ne sont pas forcément des isométries : $\mathrm{Sl}_n\mathbb{R} \not\subseteq \mathrm{O}_n\mathbb{R}$.
4. Soit X une solution de (E). Puisque $t \to A(t)$ est périodique, l'application $\tilde{X}$ définie pour $t \in \mathbb{R}$ par $\tilde{X}(t) = X(t-1)$ est également solution de (E). Par définition de la résolvante, on a d'une part $R_0^t(X(0)) = X(t)$, et d'autre part $R_1^{1+t}(\tilde{X}(1)) = \tilde{X}(1+t)$, ce qui se réécrit $R_1^{1+t}(X(0)) = X(t) = R_0^t(X(0))$. Cette identité est vraie pour toute solution de (E), i.e. pour tout $X(0) \in \mathbb{R}^2$. On a donc $R_0^t = R_1^{t+1}$.
5. Soit $X_0 \in \mathbb{R}^2$ un vecteur propre de R_0^1 pour la valeur propre 1, et soit $X : t \to R_0^t X_0$ la solution correspondante. Elle est non nulle (comme X_0). Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, on aura d'après la question précédente $X(t+1) = R_0^{t+1}(X_0) = R_1^{t+1}(R_0^1 X_0) = R_0^t(X_0) = X(t)$. Ainsi X est bien périodique de période 1.
6. Soient λ une valeur propre de R_0^1 avec $|\lambda| \leq 1$, et $X_0 \in \mathbb{C}^2$ un vecteur propore non nul associé. L'application $X : t \in \mathbb{R} \to R_0^t X_0 \in \mathbb{C}^2$ est solution de (E). Sa partie réelle X_r et sa partie imaginaire X_i sont également solutions, réelles cette fois-ci, de (E) et sont bornées sur $[0, +\infty[$ si et seulement si X l'est.

   Pour tout $t \geq 0$, on désigne par $k = \mathrm{E}(t) \in \mathbb{N}$ la partie entière de t, et on écrit en utilisant la question (4) et les propriétés de la résolvante :

   $$X(t) = R_0^t X_0 = R_k^t R_0^k X_0 = R_0^{t-k}(R_0^1)^k X_0 = \lambda^k R_0^{t-k} X_0\,.$$

   Munissons $\mathbb{R}^n$ d'une norme, et $\mathrm{End}\mathbb{R}^n$ de la norme subordonnée. Puisque $|\lambda| \leq 1$, on obtient pour tout $t \geq 0$, $\| X(t) \| \leq \sup_{s\in[0,1]} \| R_0^s \| \| X_0 \|$. La solution X est donc bornée sur $[0, \infty[$, puisque $s \in [0,1] \to \| R_0^s \| \in \mathbb{R}$ est continue, donc bornée sur le compact $[0,1]$.

Corrigé de l'exercice 4. Notons que l'équation (E) $x'(t) = F(t, x(t))$, où $F(t,x) := A(t)\,x + f(t,x)$, satisfait les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, puisque f est de classe C^1 et A est continue.

1. (a) Fixons $\varepsilon > 0$. Par hypothèse sur f et h, il existe $r(\varepsilon) > 0$ tel que, pour $\|x\| \geq r(\varepsilon)$ et $t \in \mathbb{R}$, on ait $\|f(t,x)\| \leq \varepsilon\|x\|$. Soit M_ε le sup de $\|f\|$ sur le compact $[0,T] \times \bar{B}(0, r(\varepsilon))$. La T-périodicité de f par rapport à la première variable assure que, pour $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, on a $\|f(t,x)\| \leq \varepsilon\|x\| + M_\varepsilon$.
   (b) Les solutions maximales de (E) sont globales, puisque F est à croissance sous-linéaire : $\|F(t,x)\| = \|A(t)\,x + f(t,x)\| \leq (\|A(t)\| + \varepsilon)\|x\| + M_\varepsilon$ (lemme des bouts et Gronwall).

2. Si $x_a(T) = x_a(0)$, l'application $y : t \in \mathbb{R} \to x_a(T+t) \in \mathbb{R}$ est une solution maximale de (E) (périodicité de f par rapport à t), de même condition initiale $y(0) = x_a(T) = x_a(0)$ que x_a, donc égale à x_a par Cauchy-Lipschitz. La réciproque est immédiate.

3. (a) Soit $s \in \mathbb{R}$. L'application $t \in \mathbb{R} \to R_s^t \in \mathrm{M}_n\mathbb{R}$ est la solution maximale de l'équation différentielle linéaire $M'(t) = A(t) \circ M(t)$, de condition initiale $M(s) = \mathrm{Id}$. Pour $s, t, u \in \mathbb{R}$, on aura $R_s^s = \mathrm{Id}$, $R_s^t = R_u^t \circ R_s^u$, et R_s^t inversible avec $R_s^t = (R_t^s)^{-1}$.

   (b) Soit $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. D'après (3a) on peut écrire, pour $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = R_0^t\, y(t)$; puisque $y(t) = R_t^0\, x(t)$, y est de classe C^1 et la fonction x est solution maximale de (E) de condition initiale $x(0) = a$ si et seulement si $y(0) = a$ et $y'(s) = R_s^0\, f(s, x_a(s))$ $(s \in \mathbb{R})$. D'où $x_a(t) = R_0^t\big[a + \int_0^t R_s^0\, f(s, x_a(s))\, ds\big]$ $(t \in \mathbb{R})$, et le résultat.

   (c) Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure qu'une solution $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation périodique (e_B) $x'(t) = A(t)\, x(t) + B(t)$ est elle-même périodique si et seulement si elle satisfait $x(0) = x(T)$. La conclusion suit puisque, lorsque y est une solution quelconque de (e_B), la solution générale de (e_B) est donnée par $x(t) = y(t) + R_0^T\, v$, v décrivant $\mathbb{R}^n$.

4. (a) Rappelons que l'application $(s, a) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \to x_a(s) \in \mathbb{R}^n$ est continue (dépendance des solutions par rapport aux conditions initiales).

   Le résultat suit, puisque les applications $s \in [0, T] \to R_s^T \in \mathrm{M}_n\mathbb{R}$, f et $(M, x) \in \mathrm{M}_n\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to Mx \in \mathbb{R}^n$ sont continues, et que l'intervalle d'intégration est compact.

   On peut également remarquer que, pour $a \in \mathbb{R}^n$, $F(a) = (\mathrm{Id} - R_0^T)^{-1}(x_a(T) - R_0^T(a))$.

   (b) i. On introduit $\alpha := \sup_{t \in [0,T]} \|A(t)\|$. Soit x une solution maximale de (E). La question 1. avec (par exemple) $\varepsilon = 1$ donne, pour tout $t \in [0, T]$, l'estimation $\|x'(t)\| \leq (\alpha + 1)\|x(t)\| + M_1$. Le lemme de Gronwall assure alors que, pour $t \in [0, T]$, on a $\|x(t)\| \leq e^{T(\alpha+1)}\|x(0)\| + \frac{e^{T(\alpha+1)}-1}{\alpha+1} M_1 \leq C(\|x(0)\| + 1)$ pour $C := \max(e^{T(\alpha+1)}, \frac{e^{T(\alpha+1)}-1}{\alpha+1} M_1)$.

   ii. Notons $P := \max\left(\sup_{s \in [0,T]} \| R_s^T \|, \| (\mathrm{Id} - R_0^T)^{-1}\|\right)$. Fixons $\varepsilon > 0$ er $r > 0$. Pour tout $a \in \overline{B}(0, r)$ on aura donc d'après (1a) et (4bi) :

   $$\|F(a)\| \leq P^2\, T \sup_{[0,T]} \|f(s, x_a(s))\| \leq P^2\, T\, (\varepsilon C(r+1) + M_\varepsilon)\,.$$

   Soit $\varepsilon_0 = 1/(4P^2TC)$. Pour $r \geq 1$, on a $T\, P^2\, \varepsilon_0\, C\, (r+1) \leq 2\, \varepsilon_0\, T\, P^2\, Cr \leq r/2$. On choisit alors $r_0 := \max(1, 2\, TP^2 M_{\varepsilon_0})$. La boule $\overline{B}(0, r_0)$ convient.

   (c) Conséquence immédiate de (2) et (4ab).

Corrigé de l'exercice 5. 1. On a par hypothèse $u(t) \leq w(t)$ avec, puisque v est positive, $w'(t) = u(t)\, v(t) \leq w(t)\, v(t)$ $(t \in \mathbb{R})$. La fonction $h : t \in \mathbb{R} \to w(t) \exp(-\int_0^t v(s)\, ds)$ est donc décroissante, d'où le résultat puisque $h(0) = c$.

2. (a) La résolvante $t \in \mathbb{R} \to R_0^t \in \mathrm{M}_n\mathbb{R}$ est la solution maximale de condition initiale $R_0^0 = \mathrm{Id}$ de l'équation différentielle $M't) = A(t)\, M(t)$ dans $\mathrm{M}_n\mathbb{R}$. On a donc $R_0^t = \mathrm{Id} + \int_0^t A(s)\, R_0^s\, ds$ $(t \in \mathbb{R})$ et donc, pour tout $t \geq 0$, $\|R_0^t\| \leq 1 + \int_0^t \|A(s)\|\, \|R_0^s\|\, ds$. Le résultat demandé suit donc de 1. avec $u(t) := \|R_0^t\|$, $v(t) := \|A(t)\|$ et $c = 1$.

   (b) Il suit de (a) que $\int_0^\infty \|A(s)\, R_0^s\|\, ds < \infty$, et donc que $R_0^t = \mathrm{Id} + \int_0^t A(s)\, R_0^s\, ds$ a une limite lorsque $t \to +\infty$.

(c) Le wronskien w satisfait l'équation différentielle $w'(t) = \operatorname{Tr} A(t)\, w(t)$ avec $w(0) = 1$, et donc $w(t) = \exp(\int_0^t \operatorname{Tr} A(s)\, ds)$. Par hypothèse, $\int_0^t \operatorname{Tr} A(s)\, ds$ a une limite finie lorsque $t \to +\infty$. Donc $\det R_0^\infty = \lim_{t\to+\infty} w(t) \neq 0$.

(d) Chaque solution maximale X de (E) a une limite en $+\infty$; de plus l'application linéaire qui, à $X(0)$, associe $\lim_{t\to+\infty} X(t)$ est injective (ou encore : une solution non identiquement nulle ne tend pas vers 0 en $+\infty$).

3. (a) Soit $D = \operatorname{diag}\,(ib_1, \cdots, ib_n)$ une matrice diagonale qui a les mêmes valeurs propres (avec mêmes multiplicités) que M. Il existe alors une matrice inversible $P \in \mathrm{Gl}_n\mathbb{R}$ pour laquelle $M = PDP^{-1}$. On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{tM} = P\, e^{tD}\, P^{-1}$ d'où $\|e^{tM}\| \leq \|P\|\, \|e^{tD}\|\, \|P^{-1}\|$. Les matrices $e^{tD} = \operatorname{diag}\,(e^{ib_1}, \cdots, e^{ib_n})$ restant bornées dans $\mathrm{M}_n\mathbb{R}$ (pour la norme sup, ou la norme choisie), les matrices e^{tM} $(t \in \mathbb{R})$ restent bornées dans $\mathrm{M}_n\mathbb{R}$ et le résultat suit. Attention : le produit $\|M\|\, \|M^{-1}\|$ n'est pas borné sur $\mathrm{Gl}_n\mathbb{R}$. Considérer par exemple les matrices $\operatorname{diag}(1, \varepsilon) \in \mathrm{M}_2\mathbb{R}$ pour $\varepsilon \neq 0$.

(b) On constate que $\sigma'(t) = e^{-tM}\, A(t)\, e^{tM}\, \sigma(t)$. Le résultat suit alors de 3.(a) et de 2.(b), avec $t \to e^{-tM}\, A(t)\, e^{tM}$ et $\sigma(t)$ à la place de $t \to A(t)$ et de R_0^t.

4. (a) L'équation différentielle est linéaire donc ses solutions maximales sont globales.

(b) La fonction $t \in \mathbb{R} \to X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ $X'(t) = (M + A(t))\, X(t)$, avec ici $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a(t) & 0 \end{pmatrix}$. Notons encore ρ la résolvante de $(\mathcal{E})$. Le résultat de la question 3. s'applique et il existe une matrice $Q \in \mathrm{M}_2\mathbb{R}$ telle que $e^{-tM}\rho_0^t \to_{t\to+\infty} Q$ ou encore, puisque les matrices e^{tM} $(t \in \mathbb{R})$ restent bornées, telle que $\rho_0^t - e^{tM}Q \to_{t\to+\infty} 0$. Le résultat suit, puisque $e^{tM} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 6. 1. L'équation est linéaire, ses solutions maximales sont donc globales. Ceci résulte du lemme des bouts et du lemme de Gronwall.

2. Les fonctions $x_1 : t \in \mathbb{R} \to \cos t \in \mathbb{R}$ et $x_2 : t \in \mathbb{R} \to \sin t \in \mathbb{R}$ constituent une base de l'espace des solutions maximales de l'équation homogène $x'' + x = 0$. La méthode de variation de la constante permet ramener la recherche de notre solution maximale x à la recherche de deux fonctions $a, b \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour lesquelles (pour tout $t \in \mathbb{R}$)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & a(t)\, x_1(t) + b(t)\, x_2(t) \\ x'(t) & = & a(t)\, x_1'(t) + b(t)\, x_2'(t) \end{array} \right. ,$$

et x est solution de (E). Ces conditions sont équivalentes au système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a'(t)\, x_1(t) + b'(t)\, x_2(t) & = & 0 \\ a'(t)\, x_1'(t) + b'(t)\, x_2'(t) & = & f(t) \end{array} \right. \quad \text{i.e.} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a'(t)\, \cos t + b'(t)\, \sin t & = & 0 \\ -a'(t)\, \sin t + b'(t)\, \cos t & = & f(t) \end{array} \right. .$$

On obtient alors a et b par quadrature. La solution générale de (E) est donc

$$x(t) = (A - \int_0^t f(s) \sin s\, ds)\, \cos t + (B + \int_0^t f(s) \cos s\, ds)\, \sin t \qquad (A, B \in \mathbb{R}).$$

Elle vérifie $x'(t) = -(A - \int_0^t f(s) \sin s\, ds)\, \sin t + (B + \int_0^t f(s) \cos s\, ds) \cos t$.

3. On tombe sur un système linéaire (2,2) en A, B, associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} \cos t_0 - 1 & \sin t_0 \\ -\sin t_0 & \cos t_0 - 1 \end{pmatrix}$.
La condition est que cette matrice M soit inversible, i.e. que $t_0 \notin 2\pi\mathbb{Z}$.
NB On n'a pas besoin de l'expression explicite d'une solution de (E) pour traiter cette question.

B Etudes qualitatives 1D

Corrigé de l'exercice 7. 1. Découle du cours, puisque le couple de fonctions $u(x) = 1$ et $v(x) = -1$ constitue un entonnoir.

2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on désigne par x_a la solution maximale de condition initiale $x_a(0) = a$. Il suit de la périodicité de f, et du théorème de Cauchy-Lipschitz, qu'une solution maximale $x_a : I \to \mathbb{R}$ de condition initiale $x(0) = a$ est T-périodique si et seulement si $x(1) = x(0) = a$; le sens direct évident ; pour la réciproque il suffit de remarquer que $y : t \in I+1 \to y(t-1) \in \mathbb{R}$ est également solution, de même condition initiale que x en $t = 0$.
L'application $a \in [-1, 1] \to x_a(T) \in [-1, 1]$ est continue (dépendance par rapport aux conditions initiales). Elle admet donc au moins un point fixe $\alpha \in [-1, 1]$. La solution correspondante x_α est donc périodique.

Corrigé de l'exercice 8. 1. Noter que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à (E). La fonction $h_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une sur-solution de (E) lorsque $c \leq -1$, et une sous-solution lorsque $c \geq 1$. L'isocline se trace sans difficulté, en notant que $x \to x^3$ est croissante, nulle en zéro... Si on veut être précis, on indique des tangentes verticales aux zéros (mais c'est sans importance pour la suite).

2. (a) Supposons $x(t) > 1$ pour tout $t \in I$. D'après le régionnement, x est alors croissante sur I. Comme elle est minorée par 1, elle admet une limite finie lorsque $t \to T_-$. Le lemme des bouts assure donc que $T_- = -\infty$.
   (b) Procédons par l'absurde et supposons que $x(t) > 1$ pour tout $t \in I$. D'après (a), $x(t)$ a une limite lorsque $t \to -\infty$. L'intégrale $\int_{-\infty} x'(s)\, ds = \int_{-\infty} x^3(s) - \sin(2\pi s)\, ds$ est donc semi-convergente. Or, pour $t_0, T \in I$ avec $T \leq t_0$, la minoration $x > 1$ implique $\int_T^{t_0} \left(x^3(s) - \sin(2\pi s)\right) ds \geq (t_0 - T) - \int_T^{t_0} \sin(2\pi s)\, ds \geq (t_0 - T) - 2 \to \infty$ lorsque $T \to -\infty$: une contradiction.
   (c) Puisque $y'(t) = -x'(t + 1/2) = -[x^3(t + 1/2) - \sin(2\pi t + \pi)]$, y est solution de (E). La question (b) assure l'existence de $t \in I - 1/2$ avec $y(t) \leq 1$, soit $x(t + 1/2) \geq -1$.
   (d) Soit $x : I \to \mathbb{R}$ une solution maximale. On vient de voir qu'il existe $t_0, t_1 \in I$ avec $x(t_0) \leq 1$ et $x(t_1) \geq -1$. Puisque les fonctions constantes h_1 et h_{-1} sont respectivement sous- et sur-solutions de (E), le théorème de comparaison dans le passé montre que, pour $t \in I$ avec $t \leq \inf(t_0, t_1)$, $x(t)$ reste dans le compact $[-1, 1]$. On conclut avec le lemme des bouts que $T_- = -\infty$.

3. (a) Les solutions maximales de $u' = \frac{1}{4}u^3$ sont globales dans le passé et tendent vers 0 en $-\infty$. Hormis la solution nulle, chaque solution est définie sur un intervalle borné dans le futur. Noter que u^3 est du signe de u ; une solution positive (resp. négative) est croissante (resp. décroissante) !
   (b) Conséquence de $4(b^3 - a^3) - (b - a)^3 = 3(b^3 - a^3 + ab^2 - a^2 b) = 3(b - a)(b + a)^2$.

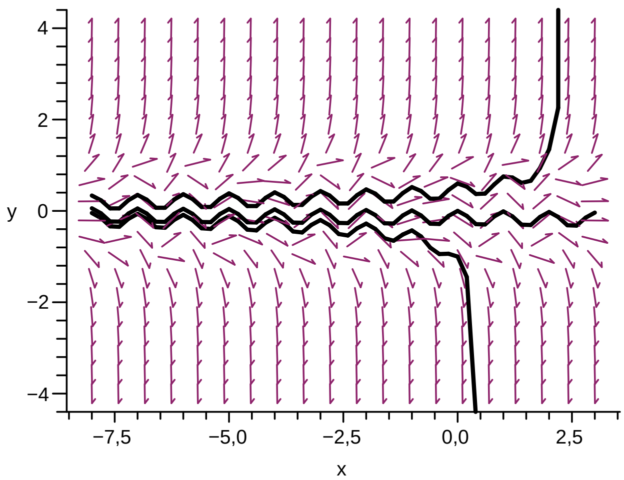
(c) On peut supposer que, sur tout l'intervalle commun de définition de x et y, on a $y-x \geq 0$ (unicité de Cauchy-Lipschitz). On évalue alors $y'-x' = y^3 - x^3 \geq \frac{1}{4}(y-x)^3$. La fonction $y-x$ est donc une sur-solution positive de l'équation $u' = \frac{1}{4}u^3$. On déduit de (3a) (comparaison dans le passé) qu'elle tend vers 0 en $-\infty$. Attention, l'inégalité démontrée en (3b) n'est correcte que pour $b \geq a$.

4. (a) On utilise la périodicité de f. Puisqu'on a $f(t+1,x) = f(t,x)$ pour $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\tilde{y}_n : t \to y_0(t-n)$ est encore une solution maximale de (E). Puisque $\tilde{y}_n(n) = y_n(n)$, on conclut avec Cauchy-Lipschitz que $\tilde{y}_n = y_n$ (et leur domaine de définition contient l'intervalle $]-\infty, n]$). De même pour z_n.

(b) i. D'après le cours, il existe (au moins) une solution globale w tracée dans l'anti-entonnoir défini sur $\mathbb{R}$ par les fonctions constantes $h_{-1} \leq h_1$.

ii. Une telle solution vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n(n) \leq w(n) \leq y_n(n)$ et donc $z_n(0) \leq w(0) \leq y_n(0)$ (par unicité de Cauchy-Lipschitz). Autrement dit, $w(0)$ appartient à l'intervalle $\cap_{n\in\mathbb{N}}[z_0(-n), y_0(-n)]$ qui, par (4a), est réduit à un point. D'où l'unicité de w.

(c) La fonction $\tilde{w} : t \in \mathbb{R} \to w(t-1) \in \mathbb{R}$ est également solution de (E) (périodicité de f) et, comme w, est à valeurs dans $[-1,1]$. L'unicité démontrée en (3b) assure que $\tilde{w} = w$, i.e. que w est périodique de période 1.



Quelques solutions de

$$x' = x^3 - \sin(2\pi t)\,,$$

dont la solution périodique.

5. La fonction $\delta = x - w$ est de signe constant sur I ; supposons $\delta > 0$. L'inégalité de (3b) assure que $\delta'(t) = x^3(t) - w^3(t) \geq \frac{1}{4}\delta^3(t)$. Soient $t_0 \in I$ et $u : J \to \mathbb{R}$ la solution maximale de $u' = \frac{1}{4}u^3$, de condition initiale $u(t_0) = \delta(t_0) > 0$. te théorème de comparaison dans le futur montre que pour $t \in I \cap J$ avec $t \geq t_0$, on a $\delta(t) \geq u(t)$. Donc $\sup I \leq \sup J < +\infty$ puisque $u(t) \to +\infty$ lorsque $t \to \sup J$.

Le cas où $\delta < 0$ se traite de façon semblable, ou se déduit du précédent par (2c).

Corrigé de l'exercice 9. 1. (a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire. Ses solutions maximales sont donc globales, ici définies sur $\mathbb{R}$.

(b) Puisque $x'(0) = 1$, x n'est pas la solution identiquement nulle. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à (E) et montre que la fonction x et sa dérivée x' ne peuvent s'annuler simultanément. Le résultat découle alors du théorème de relèvement de l'argument pour les applications de classe C^1, que l'on applique à $t \in \mathbb{R} \to (x'(t), x(t)) \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \sim \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

(c) Identifions $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$. On a $\begin{pmatrix} x' \\ x \end{pmatrix} = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ et donc $\begin{pmatrix} x'' \\ x' \end{pmatrix} = r'\,\mathrm{e}^{i\theta} + r\theta'\,i\mathrm{e}^{i\theta}$ soit, puisque x est solution de (E), $\begin{pmatrix} -q\,r\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta \\ r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta \end{pmatrix}$, d'où le résultat.

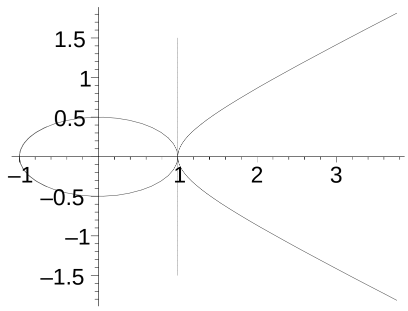
2. (a) Le théorème d'existence globale en croissance sous-linéaire s'applique et assure que θ_1 et θ_2 sont définies sur $\mathbb{R}$.

(b) i. Puisque $q_1 \le q_2$, la fonction θ_1 est sous-solution de (e$_2$). Comme $\theta_1(0) = \theta_2(0)$, le théorème de comparaison dans le futur assure que $\theta_1 \le \theta_2$ sur $[0, \infty[$.

ii. Supposons que $\theta_1(T) = \theta_2(T)$. Le théorème de comparaison dans le passé montre cette fois que $\theta_2 \le \theta_1$ sur $]-\infty, T]$, et donc $\theta_1 \equiv \theta_2$ sur $[0, T]$ par (i).

(c) On procède par l'absurde et on suppose qu'il existe $T \in]0, 1]$ avec $\theta_1(T) = \theta_2(T)$. D'après la question précédente on a, sur tout l'intervalle $[0, T]$, $\theta_1 \equiv \theta_2$ et donc $\theta_1' - \theta_2' = (q_1 - q_2)\sin^2\theta_1 \equiv 0$. Puisque $q_1 < q_2$, cela impose $\sin\theta_1(t) = 0$ pour $t \in [0, T]$, et donc (par continuité de θ_1), $\theta_1(t) = 0$ pour $t \in [0, T]$. On en tire $\theta_1'(t) = \cos^2\theta_1 + q_1\sin^2\theta_1 = 1$ pour $t \in [0, T]$: une contradiction.

3. (a) Les solutions sont globales, définies sur $\mathbb{R}$.
Pour $k = 0$, $x_k(t) = t$ et $x_k'(t) = 1$ et l'image de γ_k est une droite.
Pour $k > 0$, $x_k(t) = \frac{1}{\sqrt{k}}\sin(\sqrt{k}t)$ et $x_k'(t) = \cos(\sqrt{k}t)$ et l'image de γ_k est une ellipse.
Pour $k < 0$, $x_k(t) = \frac{1}{\sqrt{-k}}\sinh(\sqrt{-k}t)$ et $x_k'(t) = \cosh(\sqrt{-k}t)$ et l'image de γ_k est une branche d'hyperbole d'asymptotes d'équations $X = \pm\sqrt{-k}Y$.



3. (b) D'après (1), Θ_k est la détermination continue de l'argument de γ_k pour laquelle $\Theta_k(0) = 0$.

Lorsque $k < 0$, γ_k est tracée dans le demi-plan des abscisses positives et Θ_k prend ses valeurs dans l'intervalle $]-\alpha_k, +\alpha_k[\subset]-\pi/2, \pi/2[$, où $\tan(\alpha_k) = \frac{1}{\sqrt{-k}}$. On a donc $\alpha_k \to 0$ quand $k \to -\infty$, d'où $\Theta_k(1) \to 0$ lorsque $k \to -\infty$.

Lorsque $k > 0$, l'image de γ_k est une ellipse centrée en 0, parcourue dans le sens trigonométrique. Lorsqu'on se restreint à $\gamma_k([0, 1])$, l'ellipse est parcourue entièrement $\mathrm{E}(\sqrt{k}/2\pi)$ fois, E désignant la fonction partie entière. Ainsi, $\big(\mathrm{E}(\sqrt{k}/2\pi)\big)\,2\pi \le \Theta_k(1)$ et $\lim_{k\to+\infty}\Theta_k(1) = +\infty$.

4. (a) Les solutions de $x'' + ax = 0$ qui s'annulent en $t = 0$ sont proportionnelles à $t \to \sinh(\sqrt{-a}t)$ pour $a < 0$, à $t \to t$ pour $a = 0$ et à $t \to \sin(\sqrt{a}t)$ lorsque $a > 0$. Ainsi $A = \{n^2\pi^2\,,\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

(b) C'est la dépendance continue des solutions par rapport au paramètre (ici a). Ce résultat s'applique car la fonction $f : (t, \theta, a) \to \sin^2\theta + (q(t) + a)\cos^2\theta$ est continue sur $\mathbb{R}^3$, et localement lipschitzienne par rapport au couple (θ, a).

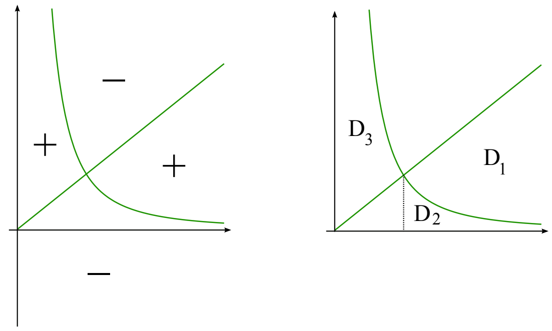
(c) Le fait que $a \in \mathbb{R} \to \theta(a,1) \in \mathbb{R}$ soit strictement croissante est conséquence immédiate de (2c).

(d) Les limites de $\theta(a,1)$ en $\pm\infty$ découlent de (3b) et (2c) : encadrer la fonction $t \to q(t)+a$ sur $[0,1]$ par les constantes $k_\pm = a \pm \sup_{t\in[0,1]} |q(t)|$.

(e) Désignons par x_a la solution maximale de $x''(t) + (q(t)+a)\,x(t) = 0$ de condition initiale $x_a(0) = 0$ et $x'_a(0) = 1$ (les autres solutions s'annulant en 0 lui sont proportionnelles). D'après (1b), $x_a(1) = 0$ si et seulement si $\theta(a,1) \equiv 0[\pi]$.
Or, d'après (4c), l'application $a \in \mathbb{R} \to \theta(a,1)$ est strictement croissante et son image est $]0,+\infty[$. Notons a_n l'unique réel pour lequel $\theta(a_n,1) = n\pi$ ($n \in \mathbb{N}^*$). La suite a_n est strictement croissante, tend vers $+\infty$, et $A = \{a_n\ ,\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

Corrigé de l'exercice 10. L'équation considérée satisfait les hypothèses de Cauchy-Lipschitz puisque f est de classe C^1.

1. La fonction définie pour $t > 0$ par $u(t) = 1/t^2$ est une sous-solution stricte de (E). Les fonctions $v(t) = t$, ainsi que $v_\alpha(t) \equiv \alpha$ où $\alpha \le 0$, sont des sur-solutions strictes de (E).



2. (a) Le domaine $D_1 = \{(t,x)\,/t \ge 1\ ,\ 1/t^2 \le x \le t\}$ est un entonnoir. Une solution maximale x de condition initiale $(t_0,x_0) \in D_1$ est globale dans le futur et, pour $t \ge t_0$, on a $(t,x(t)) \in D_1$, c'est-à-dire $1/t^2 \le x(t) \le t$.

   (b) La solution x est croissante sur $[t_0,\infty[$, donc $x(t)$ a une limite $\ell \in]0,+\infty]$ lorsque $t \to \infty$. Supposons ℓ finie. En reportant dans (E) on obtient, puisque $\ell > 0$, $\lim_{t\to\infty} x'(t) = +\infty$ et donc $\lim_{t\to\infty} x(t) = +\infty$: une contradiction.

   (c) i. Il s'agit de voir que, pour $t > 0$ grand, $h'(t) < f(t,h(t))$ ou, de façon équivalente, que $1 + 2/t^2 < 2 - 4/t^2 - 2/t^3$.

   ii. On peut choisir $A \ge t_0$. Supposons que, pour tout $t \ge A$, on ait $x(t) < h(t)$. On a donc, pour $t \ge A$, $1/t^2 \le x(t) < t - 2/t$ et on en déduit $x'(t) \ge (2/t)\,(x(t) - 1/t^2)$. Comme $x(t)$ tend vers $+\infty$ lorsque $t \to +\infty$, il existe $B \ge A$ tel que, pour $t \ge B$, on ait $x(t) - 1/t^2 \ge (3/4)\,x(t)$, d'où $x'(t)/x(t) \ge (3/2)(1/t)$.

   iii. Supposons que, pour tout $t \ge B$ on ait $x(t) < h(t)$. Il découle de (ii) qu'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $t \ge B$, on ait $ct^{3/2} \le x(t)$: contradiction puisque $x(t) \le t$ pour $t \ge t_0$. Il existe donc $T > B$ avec $x(T) \ge h(T)$, puis $x(t) \ge h(t)$ pour $t \ge T$ car h est une sous-solution de (E).

3. (a) i. Le domaine $D_2 = \{(t,x)\,/t \ge 1\ ,\ 0 \le x \le 1/t^2\}$ est un anti-entonnoir. Il existe donc au moins une solution $y : [1,\infty[\to \mathbb{R}$ dont le graphe est tracé dans D_2, et J est non vide.

ii. On a $\Delta'(t) = y_b'(t) - y_a'(t) = f(t, y_b(t)) - f(t, y_a(t)) = \int_{y_a(t)}^{y_b(t)} (\partial f/\partial x)(t,x)\, dx$. Puisque $(\partial f/\partial x)(t,x) = t + 1/t^2 - 2x \geq t/2$ lorsque $t > 0$ est grand et $0 \leq x \leq 1/t^2$, et donc $\Delta'(t) \geq (y_b(t) - y_a(t))\, t/2$, ce qu'on voulait.

iii. Supposons par l'absurde que $a, b \in J$ avec $a < b$. D'après (ii), l'écart Δ entre les solutions y_a et y_b est croissant au voisinage de l'infini. Une contradiction puisque l'entonnoir est resserré dans le futur.

Puisque la fonction nulle, et la fonction u sont respectivement une sur-solution stricte, et une sous-solution stricte de (E), on en déduit que a_0 est différent de 0 et de 1.

(b) Lorsque $a_0 < a \leq 1$ (donc $a \notin J$), le graphe $\{(t, y_a(t))\}$ ne reste pas dans D_2 pour tout $t \in [1, \sup I_a[$. Il en sort en un premier instant $T_a := \inf \{t \in [1, \sup I_a[\ /\ (t, y_a(t)) \notin D_2\}$. Puisque $y_a(T_a) > y_{a_0}(T_a) > 0$, on a $y_a(T_a) = 1/T_a^2$ et on conclut l'étude de y_a en se référant à la question (2) : y_a est décroissante sur $[1, T_a]$, croissante sur $[T_a, \infty[$ et $y_a(t)$ est équivalent à t en $+\infty$.

(c) i. Si $a < a_0$, le même raisonnement qu'en (b) montre que le graphe de y_a sort en un premier instant T_a de D_2, mais cette fois-ci avec $y_a(T_a) = 0$. Puisque la fonction nulle est sur-solution stricte de (E), on a donc $y_a(t) < 0$ pour tout $t \in I_a$ avec $t > T_a$.

ii. Pour $t > T_a$, on a donc $y_a'(t) = (t - y_a(t))\,(y_a(t) - 1/t^2) \leq -y_a^2(t)$, i.e. y_a est une sous-solution strictement négative de l'équation différentielle (e) $x' = -x^2$ sur $]T_a, \sup I_a[$. Une solution de condition initiale négative de (e) tendant vers $-\infty$ en temps fini dans le futur, on en déduit que $\sup I_a < \infty$.

4. (a) Supposons par l'absurde que, pour tout $t \in]\inf I_a, 1]$, on ait $y_a(t) < t$.

i. Le régionnement assure que y_a est décroissante sur $]\inf I_a, 1]$, et donc que $y_a(t)$ a une limite finie ℓ lorsque $t \to \inf I_a$. Le lemme des bouts montre que alors $\inf I_a = 0$. On a donc $\ell \leq 0$.

ii. Puisque $y_a(t) < 0$ pour $t \in]0, 1]$, on a $y_a'(t) = (t - y_a(t))(y_a(t) - 1/t^2) < -1/t$ sur cet intervalle : une contradiction puisque $y_a(t)$ a une limite finie lorsque $t \to 0$, et que $1/t$ n'est pas intégrable au voisinage de 0.

(b) Notons $\Theta_a := \sup\{t \in]\inf I_a, 1]\ /\ t \leq y_a(t)\}$ (cet ensemble est non vide par (a)). On a $y_a(\Theta_a) = \Theta_a$. Le domaine $D_3 = \{(t,x)\ /0 < t \leq 1\,,\ t \leq x \leq 1/t^2\}$ est un anti-entonnoir. Cela assure que $\inf I_a = 0$, que $t \leq y_a(t) \leq 1/t^2$ pour $t \in]0, \Theta_a]$ et donc que y_a est décroissante (et minorée par 0) sur l'intervalle $]0, \Theta_a]$: $y_a(t)$ admet donc une limite $\ell \geq 0$ lorsque $t \to 0$. Si $\ell \neq 0$, on remarque que $y_a'(t)$ est équivalent à ℓ/t^2 lorsque $t \to 0$: une contradiction puisque $1/t^2$ n'est pas intégrable en 0.

5. (a) On a bien $\varphi'(t) = -4/t^3 \geq (1/t^2)\,(t - 2/t^2)$ pour $t > 0$ proche de 0.

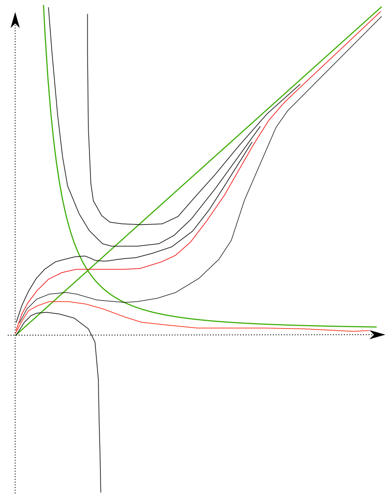
(b) On vérifie que $\psi_\alpha'(t) = -2/(t-\alpha)^3 \geq (t - 1/(t-\alpha)^2)\,(1/(t-\alpha)^2 - 1/t^2)$ pour $t > \alpha$ proche de α .

(c) Les trois cas se produisent.

— Pour $\alpha > 0$, considérer une solution maximale $z : I \to \mathbb{R}$ de condition initiale $z(\beta_\alpha) = \psi_\alpha(\beta_\alpha)$. Pour $t \in I$ avec $\alpha < t < \beta_\alpha$, le théorème de comparaison dans le passé avec une sur-solution montre que $z(t) \geq \psi_\alpha(t)$. Donc $\inf I \geq \alpha > 0$.

— Soient $0 < t_1 < 1$, et z une solution maximale de condition initiale $z(t_1) = 1/t_1^2$. Puisque $t \to 1/t^2$ est une sous-solution stricte on aura, pour $t_0 > t_1$ proche de t_1, $z(t_0) > 1/t_0^2 = \sup(t_0, 1/t_0^2)$. La solution est définie jusqu'en 0 et y tend vers 0 (cf. question (4)).

— Le domaine $\Omega := \{(t, x) \,/\, 0 < t < C\,,\ 1/t^2 \le x \le 2/t^2$ est un entonnoir. Il existe donc au moins une solution maximale z de condition initiale $(t_0, z_0) \in \Omega$, qui est définie sur tout l'intervalle $]0, t_0]$, et dont le graphe au-dessus de cet intervalle est tracé dans Ω. On a donc $z(t) \to +\infty$ lorsque $t \to 0$.



Quelques graphes de solutions de

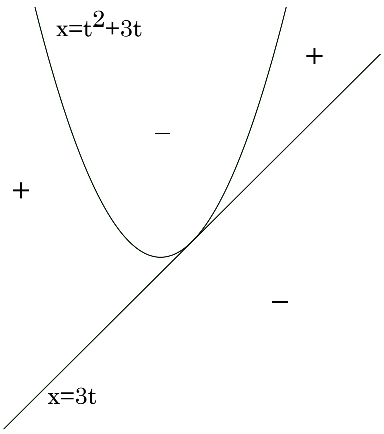
$$x' = (t - x)\,(x - \frac{1}{t^2})$$

Corrigé de l'exercice 11. 1. L'isocline $\mathcal{I}_0$ est réunion de la parabole d'équation $x = t^2 + 3t$ et de sa tangente en l'origine, d'équation $x = 3t$. On peut noter dès maintenant que f est de classe C^1, donc le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique à l'équation différentielle (*).

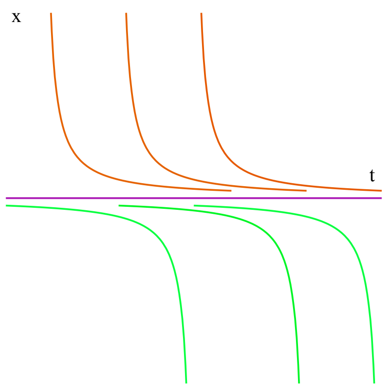
2. (a) Soit $x : I \to \mathbb{R}^*$ une solution de (*) ne s'annulant pas. On vérifie que $y := 1/x$, de classe C^1 sur I, vérifie $y'(t) = 1 - (t^2 + 6t)\, y(t) + 3t\,(t^2 + 3)\, y^2(t)$ pour tout $t \in I$. La fonction définie, pour $(t, y) \in \mathbb{R}^2$, par $g(t, y) = 1 - (t^2 + 6t)\, y + 3t\,(t^2 + 3)\, y^2$ convient (et c'est la seule).

   (b) Puisque g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ il existe, pour chaque condition initiale dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, une unique solution maximale de (**) au problème de Cauchy correspondant, et toute solution associée à cette condition initiale est restriction de cette solution maximale.

   (c) Si $y : I \to \mathbb{R}$ est solution de (**) et s'annule en $\theta \in I$, on a $y'(\theta) = g(\theta, y(\theta)) = 1$, d'où le résultat puisque $y(\theta + s) = y(\theta) + s y'(\theta) + o(s) = s + o(s)$ est non nul pour $s \neq 0$ petit.



Régionnement



Graphes des solutions maximales de (E)

3. (a) Supposons qu'il existe x_α, solution maximale de (*), pour laquelle $t_{max}(x_\alpha) = \alpha$. Le lemme des bouts assure que, lorsque $t \to \alpha$, on a $x(t) \to +\infty$ ou $x(t) \to -\infty$. Dans l'un et l'autre cas, il existe $t_0 < \alpha$ tel que x_α soit définie sur l'intervalle $]t_0, \alpha[$ et ne s'y annule pas. Introduisons donc $y_\alpha = 1/x_\alpha :]t_0, \alpha[\to \mathbb{R}$. La fonction $t \to y_\alpha(t)$ est solution de (**), et tend vers 0 lorsque $t \to \alpha$. Elle est donc restriction à l'intervalle $]t_0, \alpha[$ de l'unique solution maximale Y_α de (**), de condition initiale $Y_\alpha(\alpha) = 0$. D'où l'unicité d'une telle solution x_α.

   Passons à l'existence. On vient de voir que les zéros de Y_α sont isolés. Puisque $Y_\alpha(\alpha) = 0$, il existe un intervalle $]t_0, \alpha[$ sur lequel Y_α ne s'annule pas. La solution maximale x_α de (*) qui prolonge la solution $1/Y_\alpha :]t_0, \alpha[\to \mathbb{R}$ de (*) convient.

   (b) On dérive par rapport à t l'identité $Y'_\alpha(t) = 1 - (t^2 + 6t)Y_\alpha(t) + 3t(t^2 + 3)Y_\alpha^2(t)$, et on évalue en $t = \alpha$ en tenant compte de $Y_\alpha(\alpha) = 0$ et $Y'_\alpha(\alpha) = g(\alpha, 0) = 1$. Il vient $Y''_\alpha(\alpha) = -(\alpha^2 + 6\alpha)$, d'où $Y_\alpha(\alpha + s) = s - (\alpha^2 + 6\alpha)s^2/2 + o(s^2)$ lorsque $s \to 0$. On déduit de la question précédente que $x_\alpha(\alpha+s) = (Y_\alpha(\alpha+s))^{-1} = 1/s + (\alpha^2+6\alpha)/2 + o(1)$ lorsque $s \to 0^-$.

4. (a) On observe que la fonction définie pour $t \in \mathbb{R}$ par $\varphi(t) = 3t$ est sur-solution de (*) : en effet φ est croissante, et son graphe est une partie de l'isocline $\mathcal{I}_0$. De plus $z_a(a) = \varphi(a)$. Le théorème de comparaison dans le futur assure donc que, pour tout $t \in [a, t_{max}(z_a)[$, on a $z_a(t) \leq \varphi(t)$. Le régionnement montre alors que z_a est décroissante sur cet intervalle. D'où le résultat. Ne pas affirmer, sans argumenter, que z_a est décroissante sur $[a, t_{max}(z_a)[$.

   (b) Supposons en un premier temps que $t_{max}(z_a)$ est fini. Le lemme des bouts et le (a) assurent alors que $\ell(a) = -\infty$.

   Supposons maintenant $t_{max}(z_a) = +\infty$. Pour $t \geq a$, on a $z_a(t) \leq 3a \leq 3t \leq t^2 + 3t$, et donc $z'_a(t) = f(t, z_a(t)) \leq f(t, 3a)$. On en déduit que $z'_a(t) \to -\infty$ lorsque $t \to +\infty$. Il suit de nouveau que $\ell(a) = -\infty$.

   (c) Les solutions maximales de (E) sont la fonction nulle, et les fonctions $t \to \frac{1}{x-c}$ restreintes aux intervalles $]-\infty, c[$ ou $]c, \infty[$ ($c \in \mathbb{R}$).

   (d) On va montrer que $A = \mathbb{R}$.

   Supposons donc par l'absurde que $a \notin A$, c'est-à-dire que $t_{max}(z_a) = +\infty$. On peut choisir $T \geq \sup(a, 0)$ tel que $z_a(t) < 0$ pour tout $t \geq T$ (question b). On aura alors, pour $t \geq T$, l'estimation $z'_a(t) = (z_a(t) - 3t)(t^2 + 3t - z_a(t)) \leq -z_a^2(t)$ (puisque $z_a(t) < 0$, $3t > 0$ et $t^2 + 3t > 0$). En d'autres termes, la fonction z_a est sous-solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[T, \infty[$.

   Soit $h : I \to \mathbb{R}$ la solution maximale de (E) de condition initiale $h(T) = z_a(T) < 0$. Le (c) assure que l'intervalle I est borné supérieurement, et que $h(t) \to -\infty$ lorsque $t \to \sup I$. Le théorème de comparaison dans le futur assure que, pour $t \in I$ et $t \geq T$, on a $z_a(t) \leq h(t)$. En particulier, $z_a(t) \to -\infty$ lorsque $t \to \sup I$: une contradiction. Bien comprendre pourquoi on compare z_a avec une solution de (E) de condition initiale **négative** pour montrer $t_{max}(z_a) < \infty$.

5. (a) On vérifie sans peine que $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = t^2 + 6t - 2x$. Pour $t \geq 2^{1/3}$ et $x \leq 3t + 1/t$, on a donc $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \geq t^2 - 2/t \geq 0$.

   (b) L'unicité dans Cauchy-Lipschitz assure que δ est positive sur l'intervalle $[t_0, \infty[$. Il suit en utilisant la question précédente que, pour tout $t \geq t_0$, on a $\delta'(t) = \xi'_2(t) - \xi'_1(t) =$

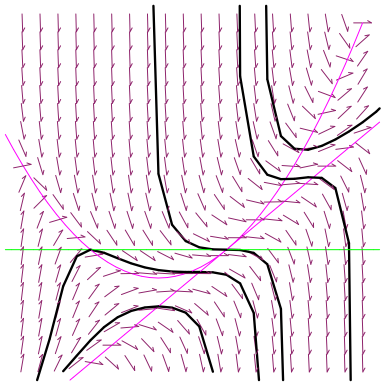
$f(t,\xi_2(t)) - f(t,\xi_1(t)) \geq 0$. La fonction δ est donc strictement positive sur $[t_0,\infty[$, croissante, et a une limite nulle en $+\infty$ puisque $0 < \delta(t) \leq 1/t$: contradiction. C'était du cours!

(c) Pour $t \geq 3$, $u'(t) = 3 - 1/t^2 \leq t - 1/t^2 = f(t,u(t))$, ie u est sous-solution de (*) sur $[3,\infty[$.

(d) Rappelons qu'on a défini $\varphi(t) = 3t$ ($t \in \mathbb{R}$). Les fonctions $\varphi \leq u$ forment un anti-entonnoir sur l'intervalle $[3,\infty[$. L'existence d'une solution ξ définie sur $[3,\infty[$, et y vérifiant $\varphi \leq \xi \leq u$, découle d'un résultat du cours. L'unicité a été prouvée en (b).

(e) Par Cauchy-Lipschitz, on sait que $x(t) < \xi(t) \leq 3t + 1/t$ pour tout $t \in I_x$ avec $t \geq t_0$.

L'unicité (vue en b) de la solution piégée dans l'entonnoir associé à (φ,u) assure que l'ensemble $X = \{t \in I_x\,,\ t \geq t_0 \mid x(t) < 3t\}$ est non vide (et minoré). Soit $T = \inf X$; on a $x(T) = 3T$. La solution x est croissante sur $[t_0,T]$ (régionnement). Elle est ensuite décroissante sur $[T, \sup I_x[$, et $\sup I_x < +\infty$ (question 4).



Graphes des solutions maximales de (*)

6. (a) i. Soient $a < b$. Si $b \geq t_{max}(z_a)$, on a bien sûr $t_{max}(z_b) > b \geq t_{max}(z_a)$.

Supposons donc $a < b < t_{max}(z_a)$. On a vu en (4a) que z_a est décroissante sur l'intervalle $[a,b]$. Donc $z_a(b) \leq 3a < 3b = z_b(b)$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure donc que, sur leur intervalle commun de définition, on a $z_a < z_b$. Puisque $z_b(t) \to -\infty$ lorsque $t \to t_{max}(z_b)$, ceci impose $t_{max}(z_a) \leq t_{max}(z_b)$.

ii. On a vu (question 3) que $x(t) \to -\infty$ lorsque $t \to t_{max}(x)$. Supposons donc par l'absurde que, pour tout $t \in I_x$, on ait $x(t) < 3t$. La fonction x est alors décroissante sur tout l'intervalle I_x. Si $t_{min}(x) = -\infty$, on obtient une contradiction car le fait que $x(t) < 3t$ pour tout $t \in I_x$ impose $x(t) \to -\infty$ lorsque $t \to -\infty$. Si $t_{min}(x) > -\infty$, le lemme des bouts et le fait que x soit décroissante entraînent $x(t) \to +\infty$ lorsque $t \to t_{min}(x)$: une contradiction, puisque $x(t) < 3t$ pour tout $t \in I_x$.

Il existe donc (au moins) un instant $s \in I_x$ pour lequel $x(s) = 3s$. Supposons maintenant qu'il existe $s_1 < s_2$ dans I_x, avec $x(s_1) = 3s_1$ et $x(s_2) = 3s_2$. Puisque x est décroissante sur $[s_1,s_2]$ (4a), on obtient $3s_2 = x(s_2) \leq x(s_1) = 3s_1$, une contradiction.

iii. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, et x_α la solution maximale de (*) pour laquelle $t_{max}(x_\alpha) = \alpha$ (question 3). Notons $\mathcal{S}(\alpha)$ l'unique instant $s \in I_{x_\alpha}$ pour lequel $x_\alpha(s) = 3s$. L'application $\mathcal{S}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ inverse $\mathcal{T}$, qui est donc une bijection. (NB Comme $\mathcal{T} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une bijection croissante, c'est en fait un homéomorphisme).

(b) i. On a $f(t,w(t)) - w'(t) = (t^6 - 7t^3) + (6t^5 - 9t^2 - t^8)$. Pour $-1 \leq t \leq 0$, on observe que $t^6 \leq |t|^5 \leq -6t^5$, que $-7t^3 = 7|t|^3 \leq 7t^2 \leq 9t^2$ et que $-t^8 \leq 0$. Le résultat suit.
Faire attention lorsqu'on multiplie une inégalité par un nombre négatif...

ii. Supposons $-1 \in I_{z_0}$. La solution z_0 et la sur-solution w satisfont $z_0(0) = w(0)$. Le théorème de comparaison dans le passé montre alors que, pour tout $t \in [-1, 0]$, on a $z_0(t) \geq w(t)$ et en particulier que $z_0(-1) \geq 1$.

iii. Si $\inf I_{z_0} \geq -1$, c'est terminé.
Sinon, on observe que la fonction nulle est sur-solution de (*) sur l'intervalle $[-3, 0]$. Le théorème de comparaison dans le passé assure donc $z_0(t) \geq 0$ sur $I_{z_0} \cap [-3, 0]$. On en déduit $f(t, z_0(t)) \leq -z_0^2(t)$ pour $t \in I_{z_0} \cap [-3, 0]$. On conclut comme dans la question (4d), en comparant z_0 avec la solution maximale $k : t \in]-2, \infty[\to \frac{1}{2+x}$ de (E), de condition initiale $k(-1) = 1$, que $\inf I_{z_0} \geq -2$.

C Equations autonomes

Corrigé de l'exercice 12. 1. (a) Les solutions constantes correspondent aux points critiques de f.

(b) Si $t \to m(t)$ est une solution non constante, elle ne passe par aucun point critique de f (question (a) et unicité dans Cauchy-Lipschitz) ; on a donc pour tout t,

$$\frac{d}{dt} f(m(t)) = - \| \operatorname{grad}_{m(t)} f \|^2 < 0.$$

(c) Si $t \to m(t)$ est une solution périodique, la fonction $t \to f(m(t))$ est également périodique. On déduit de (1a) que les seules solutions périodiques sont les solutions constantes.

2. Il résulte de (1b) que la restriction de f à V est alors une fonction de Lyapunov pour X.

3. (a) Conséquence du lemme de sortie des compacts et de (1b).

(b) Il s'agit de reprendre la preuve du théorème de Lyapunov. Puisque f décroît le long des orbites de X, on a $\lim_{k \to \infty} f(m(t_k)) = \lim_{t \to +\infty} f(m(t)) = \inf_t f(m(t))$. Par continuité de f, on a également $\lim_{k \to \infty} f(m(t_k)) = f(z)$.
Pour $s > 0$ et $k \in \mathbb{N}$, on a $\varphi_s(m(t_k)) = m(t_k + s)$. Par continuité de φ_s et de f, et par (1b), on a

$$f(\varphi_s(z)) = \lim_{k \to \infty} f(\varphi_s(m(t_k))) = \lim_{k \to \infty} f(m(t_k + s)) = \lim_{t \to +\infty} f(m(t)) = f(z) \ :$$

z est donc un point stationnaire.

(c) i. Soit $t \to m(t)$ une solution maximale de condition initiale $m(0) = m_0$ avec $f(m_0) = c$. Pour $t \geq 0$, $m(t)$ reste dans le compact $K := f^{-1}(]-\infty, c])$. Si m ne rentre pas définitivement dans le futur dans l'ouvert U, il existe une suite d'instants $t_k \to \infty$ pour lesquels $m(t_k)$ appartient au compact $L := K \setminus U$. Quitte à extraire une suite de (t_k), on peut donc supposer que $m(t_k)$ converge vers un point $p \in L$ qui devrait, par (3b), être un point critique de f : on obtient une contradiction car $p \notin U$ donc $p \neq p_i$ $(i = 1...k)$.

ii. Soit $T > 0$ tel que le morceau d'orbite $\gamma := m([T, +\infty[)$ soit inclus dans U. Puisque γ est connexe, et que les boules ouvertes $B(p_i, r)$ sont deux à deux disjointes, γ est incluse dans l'une d'entre elles, mettons $B(p_1, r)$. Supposons que $m(t)$ ne converge pas vers p_1. Il existe alors $0 < \varepsilon < r$ et une suite d'instants $t_k \to +\infty$ avec $m(t_k) \in \bar{B}(p_1, r) \setminus B(p_1, \varepsilon)$. Par compacité, on obtient un point limite $z \in \bar{B}(p_1, r) \setminus B(p_1, \varepsilon)$, qui doit donc être un point critique pour f : contradiction de nouveau.

Corrigé de l'exercice 13. 1. (a) L'origine est un point stationnaire de (E). Le système linéarisé en l'origine est associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ k & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, dont les valeurs propres sont -1 et les deux racines du polynôme $(X + 1)^2 = k$, soit $-1 \pm \sqrt{k}$ si $k \geq 0$ et $-1 \pm i\sqrt{|k|}$ sinon.

(b) Lorsque $k < 1$, toutes ces valeurs propres sont de partie réelle strictement négative et l'origine est asymptotiquement stable dans le futur. Lorsque $k > 1$, l'origine est instable dans le futur. Lorsque $k = 1$, on ne peut conclure à l'aide du seul linéarisé (une valeur propre nulle, les autres négatives).

2. (a) L'origine est le seul point stationnaire de (E).

(b) Soient X le champ de vecteurs associé au système (E), et $m = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a $D_m h \cdot X(m) = -(x - y)^2 - z^2 \leq 0$. De plus $D_m h \cdot X(m) = 0$ si et seulement si $x = y$ et $z = 0$. Lorsque $x \neq 0$, le vecteur $X(x, x, 0) = (0, 0, x^2)$ a sa troisième composante non nulle.

Soit donc $t \to \varphi_t(m)$ une orbite non stationnaire de (E). On vient de voir que la fonction $t \to h(\varphi_t(m))$ a une dérivée négative ou nulle, dont les zéros dont isolés. La fonction h est donc strictement décroissante le long des orbites distinctes de l'origine.

(c) La fonction $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ possède un minimum absolu en l'origine, et est strictement décroissante le long de toute orbite distincte de ce point : c'est donc une fonction de Lyapunov pour X en l'origine, qui est donc asymptotiquement stable dans le futur.

La fonction h est propre, donc le bassin d'attraction de l'origine est $\mathbb{R}^3$ tout entier : pour chaque $m \in \mathbb{R}^3$, la solution maximale $t \to \varphi_t(m)$ issue de ce point est globale dans le futur et converge vers l'origine lorsque $t \to +\infty$.

Corrigé de l'exercice 14. 1. L'allure du système suggère d'utiliser les coordonnées polaires. On identifie donc $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ par l'application $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \to x + iy \in \mathbb{C}$.

L'origine est un point stationnaire de ce système autonome.

Soit $z : t \in I \to z(t) = x(t) + i\,y(t) \in \mathbb{C}$ une solution non identiquement nulle. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz (qui s'applique car le champ est de classe C^1), z ne s'annule pas. Le théorème de relèvement de l'argument assure donc qu'il existe un couple de fonctions de classe C^1, soient $t \in I \to r(t) \in]0, \infty[$ et $t \in I \to \theta(t) \in \mathbb{R}$, pour lesquelles $z(t) = r(t)\, e^{i\theta(t)}$ $(t \in I)$. On a donc $z'(t) = r'(t)\, e^{i\theta(t)} + \theta'(t)\, (i\, r(t)\, e^{i\theta(t)})$.

Par ailleurs, z est solution si et seulement si $z'(t) = r(t)\, e^{i\theta(t)} + r^2(t)\, (i\, r(t)\, e^{i\theta(t)})$ $(t \in I)$. Pour chaque $\theta \in \mathbb{R}$, les vecteurs $e^{i\theta}$ et $i\, e^{i\theta}$ sont indépendants sur $\mathbb{R}$; il vient donc, en identifiant,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} r'(t) & = & r(t) \\ \theta'(t) & = & r^2(t) \end{array} \right. \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Les solutions maximales sont donc globales, avec $r(t) = a\,e^t$ puis $\theta(t) = \frac{a^2}{2}\,e^{2t} + b$ ($a > 0$, $b \in \mathbb{R}$).

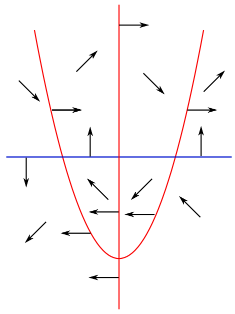
2. Observer que, lorsque $t \to -\infty$, $r(t) \to 0$ et $\theta(t)$ a une limite finie ; on arrive donc sur l'origine avec une demi-tangente.

Corrigé de l'exercice 15. 1. Les points stationnaires sont l'origine O, et les points $P = (-1, 0)$ et $Q = (1, 0)$. Les linéarisés du champ en ces points sont respectivement :

— $J_O = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ de vap $\pm i$: ce linéarisé est un centre ;

— $J_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ de vap -1 et 2 : ce linéarisé est un col ;

— $J_Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ de vap -2 et 1 : ce linéarisé est un col.



2. (a) La parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = ax^2 + b$ est réunion d'orbites si en chaque point de $\mathcal{P}$ le champ est tangent à $\mathcal{P}$, autrement dit si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$ les vecteurs $(1, 2ax)$ et $(ax^2 + b, x\,(x^2 - 1 - (ax^2 + b)))$ sont proportionnels. C'est le cas si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x(x^2 - 1 - ax^2 - b) = 2ax(ax^2 + b)$, soit $2a^2 = 1 - a$ et $2ab = -1 - b$. On trouve $(a, b) = (-1, 1)$ et $(a, b) = (1/2, -1/2)$: ce sont respectivement les paraboles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ introduites dans la question (4a) !

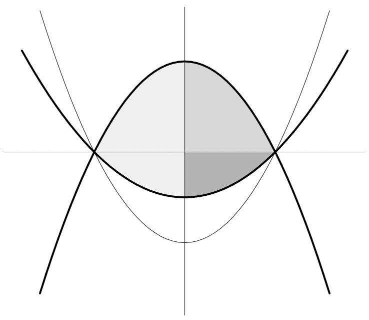
Ces deux paraboles contiennent les points singuliers P et Q. Elles sont donc chacune réunion de cinq orbites (les deux points P et Q, et les trois composantes connexes de la parabole privée de ces deux points).

(b) Le linéarisé du champ en Q est un col. Il y a donc au voisinage de Q (hormis $\{Q\}$ lui-même) quatre orbites exceptionnelles qui contiennent Q dans leur adhérence : ce sont les séparatrices. La question (2a) permet ici d'identifier ces séparatrices : elles sont portées par $\mathcal{P}_1$ (séparatrices attractives) et par $\mathcal{P}_2$ (répulsives).

3. La symétrie axiale d'axe Oy, soit $s : (x, y) \to (-x, y)$, vérifie $X(s(x, y)) = -\vec{s}(X(x, y))$. Elle préserve donc globalement le portrait de phase en renversant le sens de parcours des orbites. N.B. C'est cohérent avec le fait que P et $Q = s(P)$ sont tous deux des cols !

4. (b) Le bord du domaine A est constitué par quatre orbites (les points stationnaires P et Q et un morceau de chaque parabole $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$). C'est donc une zone piège dans le futur et le passé. Puisque A est borné, le théorème des bouts assure que l'on a $I_m = \mathbb{R}$ pour tout $m \in A$.

(c) On procède par l'absurde, et on suppose que $\varphi_t(m) \in A_1$ pour tout $t \geq 0$. Dans le futur, les fonctions x_m et y_m sont donc respectivement croissante et décroissante, et bornées. L'orbite de m converge donc dans le futur vers un point de $\bar{A}_1$ d'abscisse strictement positive, et qui doit être un point singulier, i.e. vers Q. Mais, d'après (2b), les orbites contenant Q dans leur adhérence sont $\{Q\}$ lui-même et ses séparatrices, et ne rencontrent pas A_1 : contradiction.



(d) L'orbite de m sort donc de A_1 dans le futur en un premier instant positif $s := \inf\{t \geq 0\,,\ \varphi_m(t) \notin A_1\}$, avec $\varphi_s(m) \in \partial A_1$. Le bord de A_1 est constitué d'une partie $L =]0,1[\times\{0\}$ de l'axe Ox, de l'origine (stationnaire), ainsi que d'une partie de l'axe Oy où le champ est rentrant dans A_1, et d'une portion de la parabole $\mathcal{P}_1$ qui est réunion d'orbites et ne rencontre pas A_1. On a donc $\varphi_s(m) \in L$.

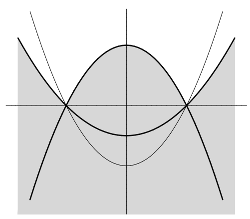
Sur L, le champ est rentrant dans A_2. Dans le futur immédiat de s, l'orbite de m est donc tracée dans A_2. Elle n'y reste pas indéfiniment dans le futur sinon elle devrait converger vers un point stationnaire d'ordonnée strictement négative (raisonner comme en (4c)). En l'absence de tel point, elle sort donc de A_2 en un premier instant $t_1 > s > 0$.

De plus $\varphi_{t_1}(m) \in \{0\}\times]-1,0[$ (raisonner comme ci-dessus).

(e) Supposons maintenant par l'absurde que l'orbite de m reste confinée dans A_1 dans le passé. Dans le passé, les fonctions x_m et y_m seraient alors respectivement croissante et décroissante, et bornées. L'orbite de m convergerait donc dans le passé vers un point stationnaire d'ordonnée strictement positive. En l'absence de tel point, on en déduit que l'orbite de m sort de A_1 en un premier instant $t_2 = \sup\{t \leq 0\,,\ \varphi_m(t) \notin A_1\} < 0$. On a $\varphi_{t_2}(m) \in \partial A_2$, et on démontre comme en (4d) (régionnement) que $\varphi_{t_2}(m) \in \{0\}\times]0,1[$.

(f) Le système étant autonome, on a $\varphi_{t_1-t_2}(p_2) = p_1$. Puisque la symétrie s d'axe Oy fixe les deux points p_1 et p_2, on déduit de (3) que $\varphi_{t_2-t_1}(p_2) = p_1$, et donc que $t \to \varphi_t(m)$ est périodique de période $T = 2(t_1 - t_2)$.

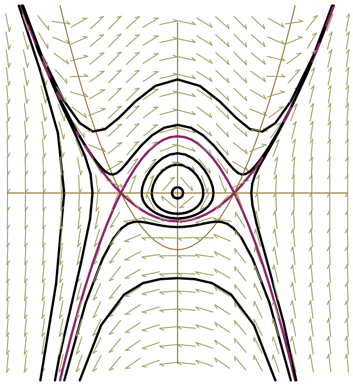
6. (a) Le domaine B est une zone piège dans le futur et dans le passé car son bord est consitué de cinq orbites (deux points stationnaires et trois portions des paraboles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$).



(b) Le régionnement assure alors que $x'_m(t) > 0$ pour tout $t \in I_m$. De plus $\left|\dfrac{y'_m(t)}{x'_m(t)}\right| = \left|\dfrac{x(x^2-1)}{y} - x\right| \leq |x|\dfrac{|x^2-1|}{|y|} + |x| \leq 3\,|x|$ puisque, lorsque $(x,y) \in B$, on a $y > (1/2)(x^2-1) \geq 0$ pour $|x| \geq 1$ et $y > 1 - x^2 \geq 0$ pour $|x| < 1$.

(c) i. On a vu en (b) que l'application $t \in I_m \to x_m(t) \in \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 dont la dérivée est strictement positive en chaque instant. Elle réalise donc un C^1 difféomorphisme de I_m sur son image J_m, qui est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Notons $h_m = (x_m)^{-1} : J_m \to I_m$. L'orbite de m est le graphe de $v_m := y_m \circ h_m$, où v_m est positive (comme y_m) et de classe C^1. On a $v'_m(x) = \dfrac{x(x^2-1)}{v_m(x)} - x$ (dériver une composée et une réciproque, ou bien exprimer que le champ est tangent au graphe de v_m en chaque point).

ii. On raisonne par l'absurde et on suppose que $\sup J_m < \infty$. Cela veut dire que, lorsque $t \to \sup I_m$, $x_m(t)$ a une limite finie. On déduit de (6b-ci) que $y_m(t)$ a également une limite finie lorsque $t \to \sup I_m$, i.e. que l'orbite converge dans le futur vers un point, qui est stationnaire et appartient à l'adhérence de B. Ce point doit être l'un des deux cols : contradiction car m n'appartient à aucune des séparatrices. Même chose pour montrer que $\inf J_m = -\infty$.



Portrait de phase de

$$X(x,y) = (y, x(x^2-1-y))$$

(d) i. D'après (6b), on a $|v_m'(x)| \leq 3x$, donc $0 < v_m(x) \leq v_m(0) + (3/2)\,x^2 \leq 2x^2$ lorsque $x > 0$ est grand.

ii. Les graphes de v_m et u étant tous deux des portions d'orbites, u et v_m sont bien solutions de (e). Il vient donc $\delta'(x) = x(x^2-1)\dfrac{u(x)-v_m(x)}{u(x)v_m(x)} = \dfrac{-2x\delta(x)}{v_m(x)}$, soit $-x\delta'(x) = \dfrac{2x^2}{v_m(x)}\delta(x)$, et le résultat d'après (i).

iii. Pour x grand, la fonction δ est donc une sous-solution positive de l'équation différentielle $h'(x) = \frac{-1}{x}h(x)$, dont les solutions sont $h(x) = \frac{c}{x^2}$ ($c \in \mathbb{R}$). Elle tend donc vers 0 lorsque $x \to +\infty$. L'orbite de m est donc asymptote à $\mathcal{P}_2$ dans le futur.

Corrigé de l'exercice 16. 1. Le bord de Ω est l'axe Ox. En chaque point de cet axe, le champ est horizontal (tangent à Ox) : l'axe est donc réunion d'orbites et Ω est une zone piège dans le futur et le passé.

2. (a) L'ensemble $\mathcal{E}(c) = \{x^2 + (y-c)^2 = c^2 - 1\}$ est vide pour $0 < c < 1$, réduit au point $Q = (0,1)$ lorsque $c = 1$, et est le cercle de centre $(0,c)$ et de rayon $\sqrt{c^2-1}$ (inclus dans Ω) pour $c > 1$.

(b) Ecrire $u'(t) = \dfrac{1}{2y}\,[2x(x^2-3x+1-y^2) + 2y(2xy)] + \dfrac{1}{2}\,(x^2+y^2+1)\dfrac{-2xy}{y^2} = \dfrac{-3x^2}{y}$. On conclut car $-6\,u = -3\,\dfrac{x^2+y^2+1}{y} \leq \dfrac{-3\,x^2}{y}$.

3. La fonction L admet un minimum absolu au point Q (cf. (2a)), et est strictement décroissante le long de chaque orbite distincte de $\{Q\}$. En effet, si $m \neq Q$, on vient de voir que $u(t) = L(\varphi_t(m))$ a une dérivée négative ou nulle, et qui ne s'annule que lorsque $\varphi_t(m)$ traverse l'axe Oy. Le champ étant transverse à cet axe, sauf au point Q où il s'annule (on a $x_m'(t) = 1 - y_m^2(t)$), $u'(t)$ ne s'annule qu'en des instants isolés et u est bien strictement décroissante. La fonction L est donc une fonction de Lyapunov pour Q. N.B. On peut en déduire que le point Q est asymptotiquement stable dans le futur (ce qui peut également se voir ici en étudiant le linéarisé du champ au point Q).

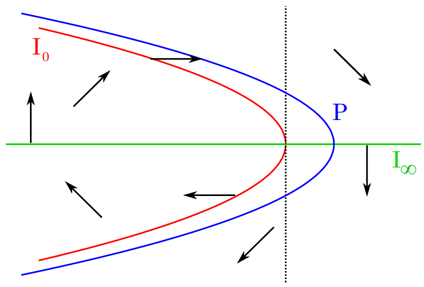
4. (a) Chacun des ensembles $\{L \leq c\} \subset \Omega$ étant compact (i.e. la fonction L est propre), le complément au théorème de Lyapunov assure que le bassin d'attraction de Q est Ω tout entier : l'orbite de tout point $m \in \Omega$ converge vers Q dans le futur.

(b) Soit $m \in \Omega$. D'après (2b), la fonction $u : t \to L(\varphi_t(m))$ vérifie l'inégalité différentielle $-6u \leq u'$. Dans le passé, elle reste donc bornée sur tout intervalle borné. Autrement dit, sur chaque intervalle borné dans le passé, $\varphi_t(m)$ reste confinée dans un compact. Le lemme des bouts assure que alors $\inf I_m = -\infty$.

Corrigé de l'exercice 17. A.

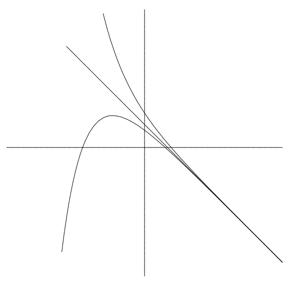
1. Le linéarisé de Y en l'origine est associé à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, de valeurs propres $\pm i$; c'est donc un centre. On ne peut rien en déduire quant à la stabilité de l'origine, dans le passé ou le futur.
2. La fonction $L(x, y) = x^2 + y^2$ est de classe C^∞ et admet un minimum strict en l'origine. On constate que, pour tout $m = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $D_m L \cdot Y(m) = -y^4 \leq 0$: la fonction L décroît donc le long des orbites de Y. Elle est même strictement décroissante le long des orbites distinctes de l'origine, puisque en chaque point $m = (x, 0)$ de l'axe Ox distinct de l'origine, le champ $Y(m) = (0, -x)$ est transverse à cet axe.
   La fonction L est donc une fonction de Lyapunov pour Y en l'origine donc ce point est asymptotiquement stable dans le futur. Puisque L est définie sur $\mathbb{R}^2$ et propre, le bassin d'attraction de l'origine dans le futur est $\mathbb{R}^2$ tout entier. Pour tout $m \in \mathbb{R}^2$, on a donc $\sup I_m = +\infty$ et $\lim_{t\to+\infty} \varphi_t(m) = (0, 0)$.

B.



1. (a) La parabole $\mathcal{P}$ est réunion d'orbites si et seulement si, en chaque point de $\mathcal{P}$, le champ est tangent à $\mathcal{P}$. C'est le cas lorsque, pour tout $y \in \mathbb{R}$, les vecteurs $(2ay, 1)$ et $(y, -y^2 - ay^2 - b)$ sont proportionnels, i.e. lorsque $a = -1$ et $b = 1/2$.

   (c) La symétrie s d'axe Ox satisfait $X(s(x, y)) = -s(X(x, y))$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Elle préserve donc le portrait de phase en renversant le sens de parcours des orbites.



2. En un point $p = (x, 0)$ avec $x > 0$, on a $X(p) = (0, -x)$ sortant de Ω. Pour $t < 0$ petit, $\varphi_t(p) \in \Omega$ tandis que pour $t > 0$, $\varphi_t(p) \in {}^c\bar{\Omega}$, donc Ω n'est pas une zone piège dans le futur. Raisonnement similaire en $q = (x, 0)$ avec $x < 0$, où le champ est rentrant, pour montrer que Ω n'est pas une zone piège dans le passé.
3. La méthode de variation de la constante donne, pour $x \in \mathbb{R}$, $w_a(x) = (\frac{1}{2} - x) + (a - \frac{1}{2})\, e^{-2x}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
			> 0		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$

w_a pour $0 < a < 1/2$

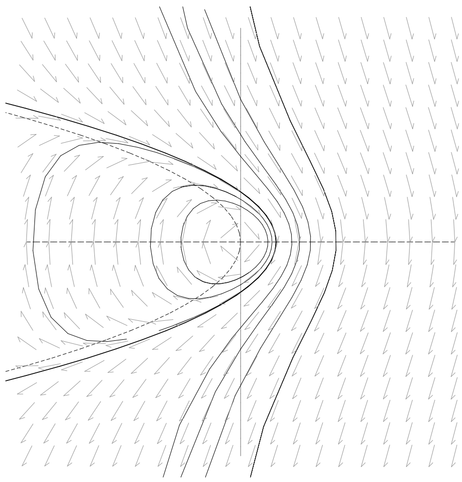
x	$-\infty$		0		$+\infty$
	$+\infty$				
		$\searrow$	> 0	$\searrow$	
					$-\infty$

w_a pour $a \geq 1/2$

4. (a) Puisque $\gamma \subset \Omega$ on a, pour tout $t \in I$, $\frac{d}{dt}x_t(m) = y_t(m) > 0$, donc le théorème d'inversion globale (en une variable) assure que l'application $t \in I \to x_t(m) \in \mathbb{R}$ est un C^1 difféomorphisme sur son image J. Si l'on note $h : J \to I$ l'application réciproque, γ est le graphe de $x \in J \to v(x) := y_{h(x)}(m)$ de classe C^1, avec $v'(x) = -v(x) - \frac{x}{v(x)}$ $(x \in J)$.

   (b) Le domaine Ω ne contenant pas de point stationnaire, le graphe $\{(x, v(x)\}$ est inclus dans une orbite si et seulement si le champ est tangent à ce graphe en chaque point, ce qui est le cas si et seulement si $v'(x) = -v(x) - \frac{x}{v(x)}$ $(x \in J)$, ou encore si et seulement si $w := v^2$ est solution de (e).

   (c) D'après les questions (3) et (4.ab), et la symétrie du champ mise en évidence en (1), une solution passant par $(0, c)$ sera périodique si et seulement si $0 < c < 1/2$.



Portrait de phase pour (E) – ou pour l'équation du second ordre

$$x''(t) + (x'(t))^2 + x(t) = 0$$

5. (a) Le changement de fonction inconnue $x \to \xi := (x, x')$ ramène l'étude de léquation différentielle autonome du second ordre $\mathcal{E}$ à celle du système (E). On a vu en (4) que toutes les orbites de X rencontrent l'axe des ordonnées Oy ; ainsi chaque solution maximale de $(\mathcal{E})$ possède un zéro.

   (b) On déduit de (4) que, pour $|c| < 1/2$, la solution x_c est périodique tandis que, pour $|c| \geq 1/2$, x_c tend vers $-\infty$ lorsque $t \to \sup I_c$ et $t \to \inf I_c$.

Corrigé de l'exercice 18. 1. L'isocline $\mathcal{I}_0$ est réunion des axes de coordonnées, et l'isocline $\mathcal{I}_\infty$ est la parabole d'équation $y = (1-x)^2$.

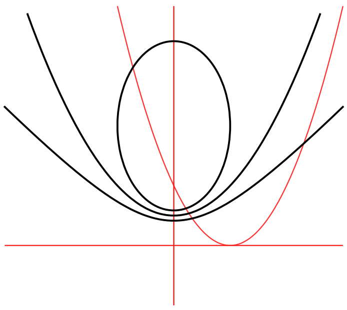
2. En chaque point de l'axe des abscisses, le champ est tangent à cet axe. Le bord de U est l'axe des abscisses, qui est réunion d'orbites, donc U est une zone piège dans le futur et le passé.

3. (b) La fonction L est continue et positive sur U, et s'annule uniquement au point P : elle y a donc un minimum absolu.

   On vérifie de plus que, pour tout $m = (x, y) \in U$, on $D_m L \cdot X(m) = -4x^2/y^2 \leq 0$. Donc L décroît le long des orbites de X incluses dans U. Et $D_m L \cdot X(m)$ ne s'annule que sur Oy.

De plus, le champ X est, en chaque point de l'axe Oy distinct de P, transverse à cet axe. Donc L décroît strictement le long des orbites de X incluses dans U et distinctes de P.

(c) Lorsque $0 < c < 1$, ℓ_c est une ellipse. Lorsque $c = 1$ c'est une parabole. Pour $c > 1$ c'est une branche d'hyperbole.



Les lignes de niveau ℓ_c, et la parabole d'équation $y = (1 - x)^2$

4. (a) On vient de produire une fonction de Lyapunov pour X en P, donc P est un point d'équilibre asymptotiquement stable dans le futur. Cela résulterait également du fait que le linéarisé de X est un puits (deux valeurs propres égales à -1).

   (b) i. Soient $a := \ell(m_0) < 1$. On a vu en (3.c) que l'ensemble $K_a = \{m \in U \ / \ l(m) \leq a\}$ est un compact de U. Puisque, pour tout $t \in I$ avec $t \geq 0$, on a $\ell(m(t)) \leq a$, il résulte du lemme des bouts que $\sup I = +\infty$.

   ii. On reprend une démonstration du cours. Supposons que $m(t)$ ne converge pas vers P lorsque $t \to \infty$. Puisque $m(t)$ reste dans le compact K_a lorsque $t \geq 0$, il existe une suite croissante d'instants $0 < t_n < t_{n+1}$ tendant vers $+\infty$, et un point $R \in K_a$ avec $R \neq P$, tels que $m(t_n) \to R$ lorsque $n \to \infty$.

   Par continuité de ℓ, on a $\ell(m(t_n)) \to \ell(R)$ lorsque $n \to \infty$. De même, pour $s > 0$, $\ell(m(t_n + s)) \to \ell(\Phi(s, R))$, où Φ désigne le flot de X. Or, par monotonie de $t \to \ell(m(t))$, on sait que $\lim_{t\to+\infty} \ell(m(t)) = \lim_{n\to+\infty} \ell(m(t_n)) = \lim_{n\to+\infty} \ell(m(t_n + s))$. Une contradiction puisque $\ell(\Phi(s, R)) < \ell(R)$.

Corrigé de l'exercice 19. 1. (b) Notons $X = (X_1, X_2)$. Puisque $X(s(x, y)) = X(-x, y) = (X_1(x, y), -X_2(x, y)) = -s(X(x, y))$, la symétrie vectorielle s préserve globalement le portrait de phase de X en renversant le sens de parcours des orbites.

(c) En chaque point de la droite $\mathcal{D} = \{y = 1\}$, le champ est tangent à D ; cette droite est donc réunion de cinq orbites (les deux points singuliers P_1 et P_2, ainsi que les trois composantes connexes de $\mathcal{D} \setminus \{P_1, P_2\}$.

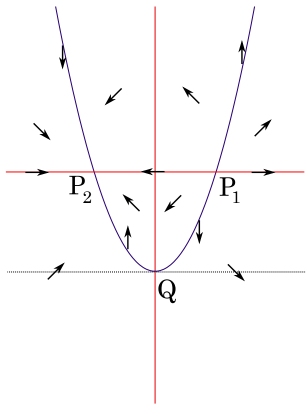
2. Les linéarisés du champ aux points singuliers sont $A_Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_{P_1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

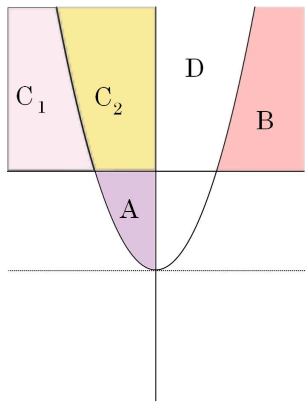
   Le linéarisé en Q est un col donc Q n'est stable ni dans le passé ni dans le futur. Le linéarisé en P_1 est une source – un noeud dégénéré répulsif – donc P_1 est asymptotiquement stable dans le passé. On en déduit par symétrie que P_2 est asymptotiquement stable dans le futur.

3. (a) Le bord de A est constitué des deux points stationnaires P_2 et Q, de portions de l'axe Oy ainsi que de la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$ sur lesquelles le champ est rentrant dans A, et d'une portion de la droite $\mathcal{D}$ (cette droite est réunion d'orbites et ne rencontre pas A). La région A est donc une zone piège dans le futur.

(b) L'orbite de m reste, dans le futur, confinée dans le compact $\overline{A}$. Le théorème des bouts assure donc que $\sup I_m = +\infty$.
Sur $[0, +\infty[$, les fonctions $t \to x_m(t)$ et $t \to y_m(t)$ sont respectivement décroissante et minorée par -1, et croissante et majorée pas 1. L'orbite de m converge donc dans le futur vers un point qui doit être un point stationnaire d'abscisse strictement négative, donc vers P_2.

(c) Soit $\mathcal{O}$ une orbite entièrement tracée dans A. Un raisonnement semblable à celui de 3.b montre que cette orbite converge vers Q dans le passé ; c'est donc l'une des deux séparatrices instables de Q.
Les deux séparatrices instables de Q arrivent en Q avec des demi-tangentes respectivement portées par $v = (-1, 1)$ et $-v = (1, -1)$ (vecteurs propres de A_Q pour la valeur propre -1).
La séparatrice correspondant à v est tracée dans A dans le passé, donc entièrement tracée dans A (3.a).
Celle correspondant à $-v$ ne convient pas car, dans le passé, elle est tracée dans le demi-plan $\{x > 0\}$, qui ne rencontre pas A.





4. (a) La région B est une zone piège dans le passé car son bord est réunion du point stationnaire P_1, d'une des orbites incluses dans $\mathcal{D}$, et d'une partie de la parabole $\mathcal{P}$ sur laquelle le champ est sortant de B. L'hypothèse faite assure que $\mathcal{O}_m \subset B$, et donc que $t \in I_m \to x_m(t)$ et $t \in I_m \to y_m(t)$ sont croissantes et minorées par 1. Dans le passé, l'orbite de m converge donc vers P_1 (raisonner comme en 3.b).
Pour tout $t \in I_m$, on a $x'_m(t) > 0$. L'application $x_m : t \in I_m \to x_m(t) \in \mathbb{R}$ est donc un C^1-difféomorphisme sur son image $]1, a[$, où $a := \lim_{t \to \sup I_m} x_m(t) \in]1, +\infty]$. Le résultat suit avec $h = y_m \circ (x_m)^{-1}$.

(b) Supposons $a < +\infty$. La fonction h ne peut avoir une limite finie lorsque $x \to a$, car l'orbite de m convergerait alors dans le futur vers un point stationnaire d'abscisse $a > 1$. Donc $h(x) \to +\infty$ lorsque $x \to a$, et l'orbite de m sort de B : contradiction.

(c) On obtient par dérivation $h'(x) = \dfrac{(x + x^3)(h(x) - 1)}{x^2 - h(x)}$ $(x > 1)$.

(d) Tous les facteurs sont positifs, donc

$$h'(x) = \frac{(x + x^3)(h(x) - 1)}{x^2 - h(x)} \geq \frac{x^3(h(x) - 1)}{x^2} = x(h(x) - 1)\,.$$

(e) Soit $M > 1$. D'après (d), il existe une constante $c > 0$ telle que, pour $x \geq M$, on ait $h(x) - 1 \geq c\, e^{x^2/2}$. Contradiction car, pour x assez grand, $c\, e^{x^2/2} > x^2$, et $\mathcal{O}_m$ sort de B.

5. (b) Le régionnement indique que C_1 est une zone piège dans le futur. Un raisonnement semblable à celui de 3.b assure que $\sup I_m = +\infty$, et que l'orbite de m converge vers P_2 dans le futur.

(c) On distingue deux cas.

Si l'orbite de m reste confinée dans C_2 dans le futur, la fonction $t \in I_m \to y_m(t)$ est décroissante minorée par 1 donc converge vers α lorsque $t \to \sup I_m$. La fonction $t \in I_m \to x_m(t)$ est décroissante, avec $x_m^2(t) < y_m(t)$, donc x_m (négative) minorée, et converge vers β. On conclut que l'orbite de m converge vers le point stationnaire P_2 dans le futur, avec $\sup I_m = +\infty$.

Si l'orbite de m sort de C_2 dans le futur à l'instant $t_0 := \{t > 0 \,/ \varphi_m(t) \notin C_2\}$, elle doit en sortir par un point du bord où le champ est sortant de C_2, i.e. avec $\varphi_{t_0}(m) \in \mathcal{P} \cap \overline{C_2}$. En ce point, le champ est rentrant dans C_1. On déduit alors de (b) que l'orbite converge encore vers P_2 dans le futur.

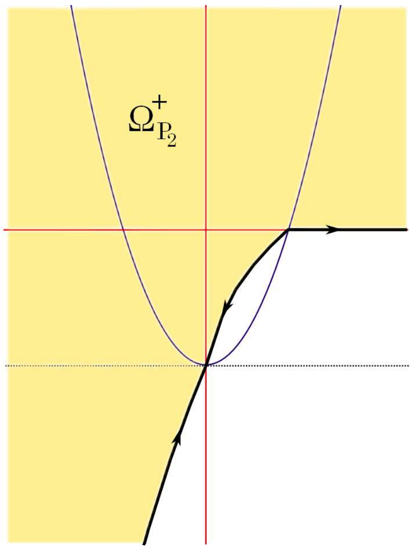
(d) Soit $m_0 = (x_0, y_0) \in D$. On procède par l'absurde et on suppose que l'orbite positive $\mathcal{O}_{m_0}^+ = \{\varphi_t(m_0) \,/ t > 0\}$ de m_0 reste dans D dans le futur. Comme dans la question 4., le régionnement assure que $\mathcal{O}_{m_0}^+$ est le graphe d'une fonction décroissante $h :]x_1, x_0[\to]1, \infty[$ avec $x_1 \geq 0$ et $|h'(x)| = \dfrac{(x + x^3)(h(x) - 1)}{h(x) - x^2} \leq \dfrac{x_0 + x_0^3}{y_0 - x_0^2}\,(h(x) - 1)$. La fonction h admet donc une limite finie lorsque $x \to x_1$, autrement dit l'orbite de m_0 converge dans le futur vers un point stationnaire d'ordonnée strictement supérieure à 1 : contradiction.

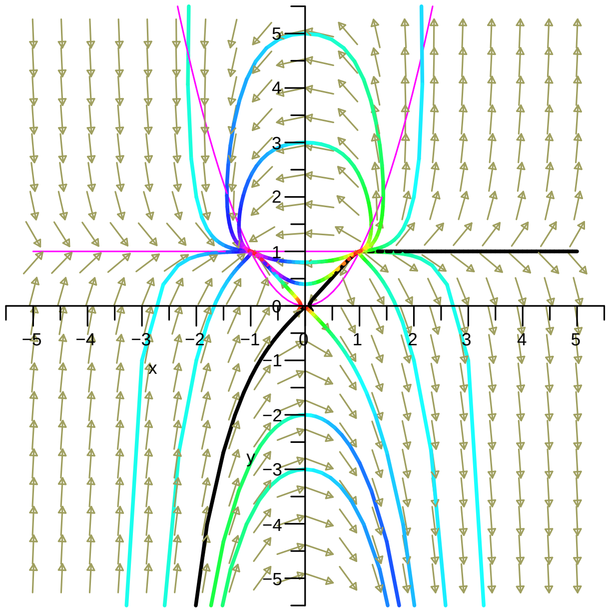
L'orbite de m_0 sort donc de D dans le futur, par un point du bord de D d'ordonnée supérieure à 1, et où le champ n'est pas rentrant, donc par l'axe Oy ; en un tel point le champ est rentrant dans C_2.

6. Avec des raisonnements semblables aux précédents, on montre qu'il existe une unique orbite entièrement tracée dans le quart de plan $\{(x, y) /\ x < 0\,,\ y < 0\}$; c'est l'une des deux séparatrices attractives de Q, graphe d'une fonction croissante $k_1 :]b, 0[\to]-\infty, 0[$. Supposons $b > -\infty$; puisque la dérivée satisfait $k_1'(x) = \dfrac{|x + x^3|(1 - k_1(x))}{x^2 - k_1(x)} \leq \dfrac{|x + x^3|(1 - k_1(x))}{x^2}$, la fonction k_1 a une limite finie lorsque $x \to b$: une contradiction puisqu'il n'existe pas de point stationnaire d'ordonnée strictement négative.

La seconde séparatrice attractives de Q (tracée dans $s(A)$) est graphe d'une fonction $k_2 :]0, 1[\to \mathbb{R}$ (croissante, avec $k_2(0) = 0$ et $k_2(1) = 1$).

On définit alors $k :]-\infty, \infty[\to \mathbb{R}$ en posant $k(x) = k_1(x)$ pour $x < 0$, $k(0) = 0$, $k(x) = k_2(x)$ pour $x \in]0, 1[$ et $k(x) = 1$ lorsque $x \geq 1$. Les questions précédentes, et le régionnement, assurent que $\Omega_{P_2}^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/ y > k(x)\}$.





Corrigé de l'exercice 20. 1. (a) Si $p = \lim_{k\to\infty} \varphi_{t_k}(m)$, où la suite t_k converge vers $\sup I_m$, le point p est limite – pour tout $t \in I_m$ – d'une suite de points de $\{\varphi_s(m)\,|\, s \in I_m,\ s \geq t\}$. Supposons réciproquement que $p \in \omega(m)$. Soit $a_k \in I_m$ $(k \geq 1)$ une suite tendant vers $\sup I_m$. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on a $p \in \overline{\{\varphi_s(m)\,|\, s \in I_m,\ s \geq a_k\}}$, et il existe donc $t_k \in I_m$ avec $t_k \geq a_k$ pour lequel $\| p - \varphi_{t_k}(m) \| \leq 1/k$. La suite (t_k) convient.

(b) L'ensemble limite $\omega(m)$ est fermé comme intersection de fermés.

(c) Supposons $\omega(m)$ non vide, et choisissons un point $p \in \omega(m)$ ainsi qu'un voisinage compact $K \subset \mathbb{R}^n$ de p. Il existe une suite $t_k \in I_m$ avec $t_k \to \sup I_m$ telle que $\varphi_{t_k}(m) \in K$. Le lemme des bouts assure donc que $\sup I_m = +\infty$.

2. Le champ X_1 est un champ linéaire qui est un col : deux valeurs propres -3 et 1 de signes opposés, correspondant aux espaces propres $E(-3)$ dirigé par $v = (1, -1)$ et $E(1)$ dirigé par $w = (3, 1)$. Pour $m \in E(-3) = \mathbb{R}v$ on a $\omega(m) = \{0\}$; sinon, $\omega(m) = \emptyset$.

3. (a) i. Le flot $\varphi : (t, m) \in \Omega := \{(t, m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \,|\, t \in I_m\} \to \varphi_t(m) \in \mathbb{R}^n$ est défini sur Ω ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Le flot y est continu et satisfait $\varphi_0 = \mathrm{Id}$ et, lorsqu'elles sont définies, les relations $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$.

ii. D'après la question 1. il existe une suite $t_k \to +\infty$ telle que $\varphi_{t_k}(m) \to_{k\to\infty} p$. Soit $s \in I_p$. On veut montrer que $\varphi_s(p) \in \omega(m)$. Pour cela on observe que φ_s est définie, et continue, sur un voisinage de p. Pour k suffisament grand, $\varphi_s(\varphi_{t_k}(m))$ sera donc bien défini, avec $\varphi_s(\varphi_{t_k}(m)) \to_{k\to\infty} \varphi_s(p)$. On conclut par 1.(a) puisque $\varphi_s(\varphi_{t_k}(m)) = \varphi_{t_k+s}(m)$.

iii. Par définition on a, pour tout point $p \in \mathbb{R}^n$, l'inclusion $\omega(p) \subset \overline{\mathcal{O}(p)}$. Soit $p \in \omega(m)$. On vient de voir que $\mathcal{O}(p) \subset \omega(m)$. Puisque $\omega(m)$ est fermé (question 1.) il suit que $\omega(p) \subset \omega(m)$.

iv. Si l'ensemble limite de m est le singleton $\{p\}$, il suit que l'orbite de p est incluse dans $\omega(m) = \{p\}$, et donc que $X(p) = 0$: p est un point stationnaire.

(b) i. On suppose que $\omega(m)$ n'est pas un singleton, et on choisit un point $q \in \omega(m)$ distinct de p. En particulier $\| q - p \| > \varepsilon$. Il existe donc deux suites de réels t_k et s_k tendant vers $+\infty$ telles que $\varphi_{t_k}(m) \to p$ et $\varphi_{s_k}(m) \to q$. Pour k grand, on aura donc $\| \varphi_{t_k}(m) - p \| \leq \varepsilon/2$ et $\| \varphi_{s_k}(m) - p \| \geq \varepsilon$. Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à $t \to \varphi_t(m)$ assure l'existence de u_k dans l'intervalle $[t_k, s_k]$ (ou $[s_k, t_k]$) pour lequel $\varepsilon/2 \leq \| \varphi_{u_k}(m) - p \| \leq \varepsilon$. Par compacité de la couronne $\overline{B(p,\varepsilon)} \setminus B(p, \varepsilon/2)$ on peut supposer (quitte à extraire une sous-suite) que la suite $\varphi_{u_k}(m)$ converge vers un point r de cette couronne. Le point r appartient donc à $\omega(m)$: contradiction.

ii. Supposons que l'orbite de m ne converge pas vers p dans le futur. Il existe donc $\varepsilon > 0$ et une suite d'instants $s_k \to +\infty$ avec $\| \varphi_{s_k}(m) - p \| \geq \varepsilon$. On raisonne alors comme dans la question précédente, et l'on produit un second point dans $\omega(m)$: contradiction.

Corrigé de l'exercice 21. 1. Le champ est de classe C^1, donc le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique.

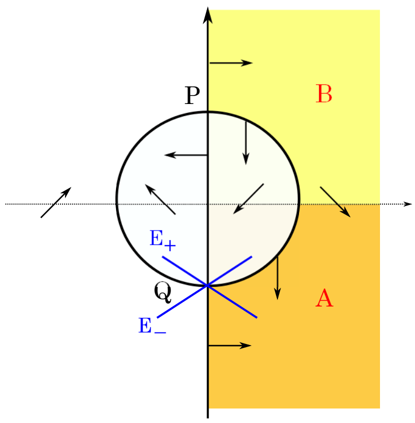
2. (a) Les points stationnaires sont les deux points $P = (0, 1)$ et $Q = (0, -1)$.

(b) Le champ vérifiant $X(s(x, y) = -s(X(x, y))$, la symétrie vectorielle s préserve les orbites en renversant le sens de parcours.

3. (a) Le linéarisé de X en P est associé à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, de valeurs propres $\pm i\sqrt{2}$: il s'agit d'un centre.

Le linéarisé de X en Q est associé à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, de valeurs propres $\pm\sqrt{2}$: il s'agit d'un col.

(b) Le portrait de phase de X au voisinage de Q doit faire apparaître les quatre orbites exceptionnelles : deux séparatrices répulsives qui arrivent en Q tangentiellement à l'espace propre relatif à la valeur propre positive (ici $E_+ = \mathrm{vect}(-\sqrt{2}, 1)$), et deux séparatrices attractives qui arrivent en Q tangentiellement à l'espace propre relatif à la valeur propre négative (ici $E_- = \mathrm{vect}(\sqrt{2}, 1)$).



(c) Le linéarisé de X au point P étant un centre, on ne peut en déduire si P sera stable pour X dans le futur. Cf. les exemples vus en TD.

5. (a) On a $x_R(0) = 1$ et $y_R(0) = 0$.
Pour tout $t \in I_R$, l'expression de X donne $x'_R(t) = f(t) = x_R^2(t) + y_R^2(t) - 1$ et $y'_R(t) = -x_R(t)$.
Il vient $x'_R(0) = 0$, $y'_R(0) = -1$ puis $f'(0) = 2(x_R(0)x'_R(0) + y_R(0)y'_R(0)) = 0$.
Puisque $x''_R = f'$, de $f''(t) = 2(x'_R{}^2(t) + y'_R{}^2(t)) + 2(x_R(t)x''_R(t) + y_R(t)y''_R(t))$ suit $f''(0) = 2$.

(b) On a $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ et $f''(0) > 0$. La formule de Taylor à l'ordre 2 montre donc que, pour t petit non nul, $f(t) > 0$. Ceci signifie que l'orbite du point R reste localement en dehors du disque unité. Le résultat demandé suit puisque $x_R(0) = 1$ donc $x_R(t)$ reste strictement positif pour t petit, tandis que $y_R(0) = 0$ et $y'_R(0) = -1$, donc $y_R(t)$ est –toujours pour t petit– du signe opposé à celui de t.

6. (a) On peut par exemple remarquer que le bord de A est constitué :
   — du segment $I_1 =]1, \infty[$ dans l'axe des abscisses, le long duquel le champ est rentrant dans A : pour $m = (x, 0) \in I_1$, on a $X(m) = (a, b)$ avec $b < 0$; donc, pour $t < 0$ petit, $y_m(t) > 0$ et donc $\xi_m(t) \notin A$ (tandis que, pour $t > 0$ petit, $\xi_m(t) \in A$) ;
   — du segment $I_2 =] - \infty, -1[$ dans l'axe des ordonnées, le long duquel le champ est rentrant dans A : pour $m = (0, y) \in I_2$, on a en effet $X(m) = (a, 0)$ avec $a > 0$;
   — du quart de cercle $\{x^2 + y^2 = 1\,,\ x > 0\,,\ y < 0\}$ où le champ est rentrant dans A ;
   — du point R ; on vu en 5. que, au point R, le champ est rentrant dans A ;
   — du point Q qui est stationnaire.

   Le résultat suit alors d'une proposition du cours.

   (b) Une orbite (distincte de Q et) contenant Q dans son adhérence est l'une des quatre séparatrices. Ces séparatrices sont associées aux demi-espaces propres du linéarisé en Q.

   Les deux séparatrices attractives convergent dans le futur $Q = (0, -1)$ avec des demi-tangentes portées par $E_- = \mathrm{vect}(\sqrt{2}, 1)$. En temps positif grand, l'une d'entre elle est donc tracée dans la zone $s(A)$ et l'autre dans le disque unité. Elles ne conviennent donc pas.

   Les deux séparatrices répulsives arrivent en Q avec des demi-tangentes portées par $E_+ = \mathrm{vect}(-\sqrt{2}, 1)$. L'une d'entre elles est donc tracée, en temps négatif grand, dans le disque unité : elle ne convient pas. L'autre, correspondant à la demi-tangente $\mathbb{R}^+ \cdot (\sqrt{2}, -1)$, est tracée dans A en temps négatif grand ; la question précédente assure donc qu'elle entièrement tracée dans A.

   (c) Choisissons un point m de l'orbite γ_1. On a donc $\gamma_1 = \{(x_m(t), y_m(t)) \mid t \in I_m\}$ avec, puisque $\gamma_1 \subset A$, $x'_m(t) > 0$ pour tout $t \in I_m$. L'application $t \in I_m \to x_m(t) \in J$ est donc un C^1 difféomorphisme (croissant) de I_m sur son image $J := x_m(I_m)$. Notons $\varphi : J \to I_m$ l'application réciproque. Notons également $\alpha := \sup J = \lim_{t \to \sup I_m} x_m(t)$ et remarquons que, puisque γ_1 converge vers Q dans le passé, on a $\inf J = \lim_{t \to \inf I_m} x_m(t) = 0$.

   L'orbite γ_1 est donc le graphe de l'application $h := y_m \circ \varphi : J \to \mathbb{R}$. Puisque $\gamma_1 \subset A$ on a $y'_m(t) < 0$ pour tout $t \in I_m$, et donc $h'(x) = y'_m(\varphi(x))\, \varphi'(x) < 0$ pour tout $x \in J$. Puisque γ_1 converge vers Q dans le passé, on a $\sup(\varphi(J)) = \lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{t \to \inf I_m} y_m(t) = -1$. On pose $\beta = \inf(\varphi(J))$. On a de plus pour tout $x \in]0, \alpha[$:

$$h'(x) = y'_m(\varphi(x))\, \varphi'(x) = \frac{y'_m(\varphi(x))}{x'_m(\varphi(x))} = \frac{-x}{x^2 + h^2(x) - 1}\,.$$

   (d) Supposons α et β finis. Cela veut dire que l'orbite γ_1 converge dans le futur vers le point $Z = (\alpha, \beta)$, qui doit donc être un point stationnaire d'abscisse α strictement positive. Les seuls points stationnaires étant P et Q, c'est exclu.

   (e) Nous allons montrer que $\alpha = +\infty$ et $\beta = -\infty$. Si ce n'était pas le cas on serait, d'après la question précédente, dans l'un des deux cas suivants :
   — $\alpha < +\infty$ et $\beta = -\infty$ (asymptote verticale) : la question (c) montre dans ce cas que $h'(x) \to 0$ lorsque $x \to \alpha$, une contradiction car alors $h(x)$ ne peut avoir une limite infinie lorsque $x \to \alpha$.

— $\alpha = +\infty$ et $\beta > -\infty$ (asymptote horizontale) : le même raisonnement montre alors que $h'(x) \sim \frac{-1}{x}$ et donc ($\frac{-1}{x}$ n'étant pas intégrable en ∞) que $h(x)$ ne peut avoir une limite finie quand $x \to +\infty$: contradiction de nouveau.

(f) La solution ξ_m convergeant vers Q dans le passé, le lemme des bouts assure que $\inf I_m = -\infty$.

Il suit de (e) qu'il existe $T \in I$ avec, pour $t \in I_m$ et $t \geq T$, $x'_m(t) = x^2_m(t) + y^2_m(t) - 1 \geq x^2_m(t)$. La solution maximale $z : J_z \to \mathbb{R}$ de l'équation diffrentielle (E) $z'(t) = z^2(t)$, de condition initiale $z(T) = x_m(T) > 0$, explose en temps fini **dans le futur en tendant vers** $+\infty$.

Puisque x_m est une sur-solution de (E) et que $z(T) = x_m(T)$, il suit que $x_m(t) \geq z(t)$ pour tout $t \geq T$ dans le domaine commun de définition de x_m et z. On en déduit $\sup I_m \leq \sup J_z$: la solution ξ_m n'est donc pas globale dans le futur.

7. (a) Puisque Q est un col, une orbite convergeant vers Q dans le passé est l'une des séparatrices répulsives. L'une d'entre elle est γ_1 dont on vient de voir qu'elle est entièrement tracée dans A, et ne convient donc pas.

L'autre a $\mathbb{R}^+ \cdot (-\sqrt{2}, 1)$ pour demi-tangente en Q : elle est donc tracée, en temps négatif grand, dans le demi-disque D_-. Nous la noterons γ_2.

(b) Supposons γ_2 entièrement tracée dans D_-. Le régionnement, et le fait que ce demi-disque soit borné, assurent que l'orbite γ_2 converge dans le futur vers un point qui doit être un point stationnaire d'abscisse strictement négative : contradiction.

L'orbite sort donc de D_- en un point $m_2 \in \partial D_-$ de son bord. Soyons plus précis. On choisit $m \in \gamma_2$ tel que $\xi_m(t) \in D_-$ pour tout $t \leq 0$, et on introduit $T = \inf\{t \in I_m \,|\, \xi_m(t) \notin D_-\}$ et $m_2 = \xi_m(T) = (x_2, y_2) \in \partial D_-$.

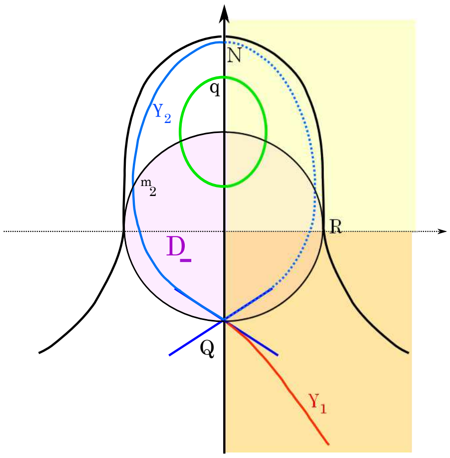
Le régionnement assurant $x'_m(t) < 0$ pour $t < T$, et donc que $x_2 < 0$, le point m_2 est bien sur le cercle unité (et non sur le segment $[-1, 1]$ de l'axe des ordonnées).

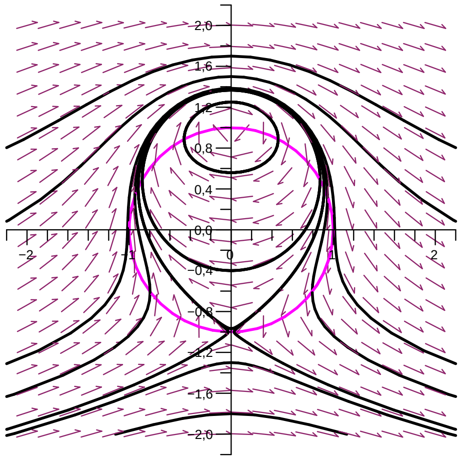
(c) Le point N est stable par la symétrie s. Son orbite γ_2 est donc globalement stable par s. Comme γ_2 converge vers Q dans le passé, elle converge également vers $Q = s(Q)$ dans le futur.

(d) Pour $t > 0$ petit, on a $\xi_q(t) \in B$ car $x_q(0) = 0$, $x'_q(0) > 0$ et $y_q > 0$. L'orbite $\gamma(q)$ est distincte de γ_2 donc ne la rencontre pas.

L'orbite $\gamma(q)$ ne peut donc rester dans B dans le futur : sinon elle serait bornée et, le régionnement assurant la monotonie de x_q et y_q pour $t \geq 0$, devrait converger dans le futur vers un point stationnaire d'abscisse positive.

Cette orbite $\gamma(q)$ sort donc de la zone B en un premier instant positif, et rentre dans le demi-disque unité $D_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\,,\, x > 0\}$. Elle ne peut ensuite rester dans le futur dans ce demi-disque car alors elle devrait converger (régionnement) vers le seul point fixe disponible, à savoir Q – impossible car $\gamma(q)$ n'est pas la séparatrice $\gamma_2 = s(\gamma_2)$. Elle sort donc du demi-disque par le segment $]-1, 1[$ de l'axe des ordonnées. On conclut en utilisant la symétrie s que l'orbite $\gamma(q)$ est périodique.





Corrigé de l'exercice 22.

1. Voir le cours.

2. Quitte à changer de repère, on peut supposer que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec $a < 0$ et $b \neq 0$. Pour $m = (x, y)$, on a $X(m) = Am + o(m)$. Si l'on identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ en posant $z = x + iy$, l'équation différentielle associée se lit alors $z'(t) = \alpha z(t) + o(z(t))$, où $\alpha = a + ib$. En passant en coordonnées polaires (justifier !), on obtient le système équivalent
$$\left\{ \begin{array}{rcl} r' & = & ar + o(r) \\ \theta' & = & b + o(1)\,. \end{array} \right.$$
Le résultat suit.

3. Lorsqu'on a un soleil, pour un champ C^1, le système précédent s'écrit
$$\left\{ \begin{array}{rcl} r' & = & ar + o(r) \\ \theta' & = & o(1)\,. \end{array} \right.$$
On en déduit, comme dans le cas précédent, le fait que l'origine est asymptotiquement stable dans le futur - et donc qu'une solution démarrant près de 0 est globale dans le futur. Par contre, l'information minime qu'on a sur θ' ne permet pas de savoir si $t \to \theta'(t)$ est ou non intégrable (ou semi-intégrable...) sur $[0, \infty[$ et donc si θ a ou non une limite dans le futur. Par contre pour un champ C^2, on aura plus précisément
$$\left\{ \begin{array}{rcl} r' & = & ar + O(r^2) \\ \theta' & = & O(r)\,. \end{array} \right.$$
La première équation donne comme dans la question précédente que, pour une condition initiale proche de l'origine, la solution tend *exponentiellement vite* vers 0. En reportant dans la seconde équation on constate cette fois-ci que θ' est intégrable, d'où le résultat.

Dans l'exemple proposé, le linéarisé est $Y'(m) = -m$ i.e. un soleil. On passe en coordonnées polaires et on obtient, après justification bien entendu,

$$\begin{cases} r' &= -r \\ \theta' &= \frac{1}{\log r^2}\,. \end{cases}$$

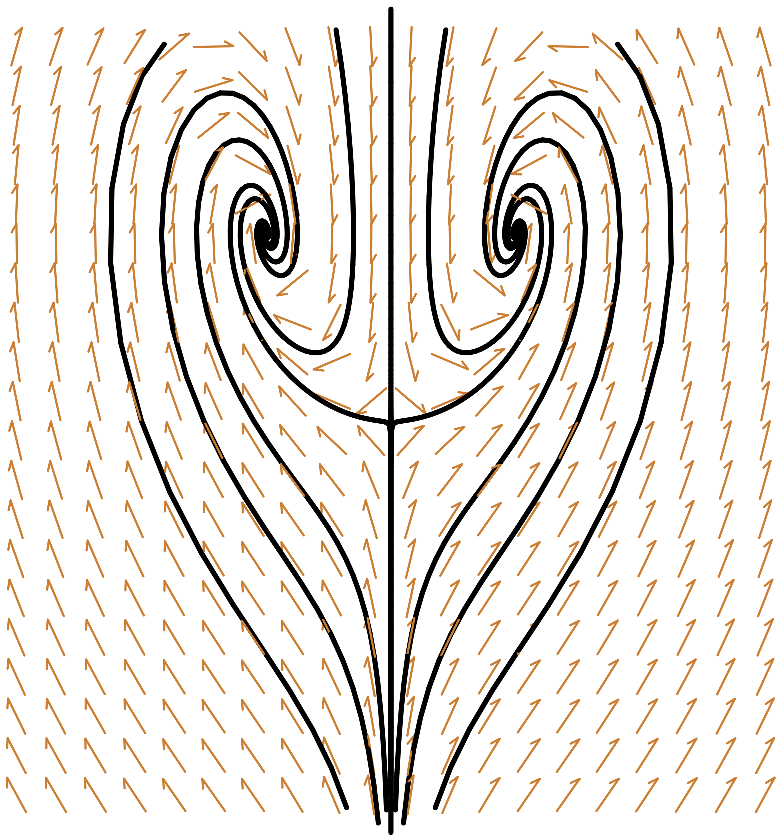
La première équation donne $r(t) = r_0 e^{-t}$. En réinjectant dans la seconde équation, on obtient alors $\theta'(t) = 1/(c-2t)$ qui n'est pas intégrable en $+\infty$. Les solutions non constantes convergent donc vers l'origine en faisant une infinité de tours.

4. Lorsque le linéarisé est un centre, un passage en coordonnées polaires conduit au système

$$\begin{cases} r' &= o(r) \\ \theta' &= a + o(1)\,. \end{cases}$$

On ne peut rien dire en général du comportement de r dans le futur (voir les deux exemples proposés). Par contre *dans le cas* où une solution converge vers l'origine dans le futur, i.e. où $r(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$, on aura $\theta'(t) \to a \neq 0$ lorsque $t \to \infty$, et donc la solution spirale autour de l'origine.

Corrigé de l'exercice 23.



Voici le portrait de phase. A vous de tout justifier !