Corrigé Processus stochastiques

Examen du 7 janvier 2013 – Durée : 2h30.

Exercice 1

1. Dans tous les cas, on écrit le processus demandé comme $f(t, B_t)$ et on applique la formule d'Itô.
   (a) $f(t,x) = (x+t)\exp(-x-t/2)$;
   $\dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{(2-x-t)}{2}\exp(-x-t/2)$;
   $\dfrac{\partial f}{\partial x} = (1-x-t)\exp(-x-t/2)$;
   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (-2+x+t)\exp(-x-t/2)$.
   Soit :
   $$\mathrm{d}X_t = (1-B_t-t)\exp(-B_t-t/2)\,\mathrm{d}B_t.$$
   (b) $f(t,x) = \exp(t/2)\sin(x)$;
   $\dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\exp(t/2)\sin x$; $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \exp(t/2)\cos x$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\exp(t/2)\sin x$.
   Soit :
   $$\mathrm{d}U_t = \exp(t/2)\cos B_t\,\mathrm{d}B_t.$$
2. C'est un cas particulier d'un exercice vu en TD avec $\mu = 1/2$ et $\sigma = 1$. La solution s'écrit $Y_t = \exp(B_t)$.
3. On utilise à nouveau Itô avec $f(t,x) = x/(1+t)$. On trouve :
   $$\mathrm{d}Z_t = -\frac{B_t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}B_t}{1+t}.$$

Exercice 2

1. Lorsque $X_t \approx b$, le comportement de (X_t) est proche de celui d'un mouvement Brownien sans dérive, de volatilité $\sigma\sqrt{b}$. Lorsque X_t s'éloigne de b, le terme en $\mathrm{d}t$ agit comme une force de « rappel » vers b.
2. On utilise Itô avec $f(t,x) = e^{at}x$. On trouve :
   $$\mathrm{d}Y_t = ae^{at}X_t\,\mathrm{d}t + (a(b-X_t))e^{at}\,\mathrm{d}t + \sigma e^{at}\sigma\sqrt{X_t}\,\mathrm{d}W_t,$$
   soit :
   $$\mathrm{d}Y_t = abe^{at}\,\mathrm{d}t + \sigma e^{at}\sigma\sqrt{X_t}\,\mathrm{d}W_t.$$
3. En intégrant l'équation précédente entre 0 et u, on trouve :
   $$Y_u - Y_0 = ab\int_0^u e^{at}\,\mathrm{d}t + \sigma\int_0^u e^{at}\sqrt{X_t}\,\mathrm{d}W_t$$
   soit, après calcul de la première intégrale :
   $$Y_u = Y_0 + b(e^{au}-1) + \sigma M_u.$$
4. $(M_u)_u$ est une martingale relativement à la filtration associée à $(W_t)_t$, car il s'agit de l'intégrale d'Itô d'un “bon processus” (au sens du cours), contre les variations de (W_t).
   Comme une martingale est d'espérance constante, on en déduit que $\mathbb{E}(M_u) = \mathbb{E}(M_0) = 0$.
5. D'où :
   $$\mathbb{E}(Y_u) = b(e^{au}-1) + Y_0$$
   et :
   $$\mathbb{E}(X_u) = e^{-au}\mathbb{E}(Y_u) = b(1-e^{-au}) + X_0.$$
6. Comme a et b sont non nuls, $\mathbb{E}(X_u)$ dépend de u donc le processus $(X_u)_u$ n'a pas une espérance constante. Il ne peut donc pas être une martingale.

Exercice 3

1. Fait en TD. On trouve $e^{s^2/2}$.
2. Fait en TD.
3. T est l'instant de premier passage du processus W, qui est $\mathcal{F}$-adapté (puisque $\mathcal{F}$ est la filtration naturelle de W) dans le borélien $\{a\}$. C'est donc un temps d'arrêt relativement à $\mathcal{F}$ par un théorème du cours.
4. $(Z_{t\wedge T})_t$ est la martingale (Z_t) arrêtée en T, qui est un temps d'arrêt. C'est donc encore une martingale.

   Une martingale étant d'espérance constante, on a :

   $$\mathbb{E}(Z_{t\wedge T}) = \mathbb{E}(Z_0) = 1 \ \ \forall t \geq 0.$$

5. Soit $\omega \in \Omega$. Montrons d'abord que pour tout $0 \leq u \leq T(\omega)$, on a $W_u(\omega) \leq a$. En effet, si tel n'est pas le cas (c'est-à-dire $W_u(\omega) > a$), le théorème des valeurs intermédiaires (appliqué à la fonction $t \mapsto W_u(\omega)$ – continue d'après une propriété du cours – entre $t = 0$ et $t = u$) donne l'existence de $u'(\omega) < u$ tel que $W_{u'(\omega)}(\omega) = a$, et donc $T(\omega) \leq u'(\omega)$, ce qui est une contradiction puisque $u \leq T(\omega)$ et $u'(\omega) < u$.

   Il s'ensuit que, pour tout $t \geq 0$, $W_{t\wedge T} \leq a$ puisque $W_T = a$. D'où, comme $\gamma > 0$,

   $$Z_{t\wedge T} \leq \exp(\gamma a)\exp\left(-\gamma^2 \frac{t\wedge T}{2}\right) \ \ \forall t \geq 0.$$

   La première inégalité est donc vérifiée avec $C = \exp(\gamma a)$.

   La seconde découle immédiatement du fait que $Z_{t\wedge T} \geq 0$ et que $\exp\left(-\gamma^2 \frac{t\wedge T}{2}\right) \leq 1$.
6. (a) Soit $\omega \in \Omega$ tel que $T(\omega) = +\infty$. On a $t \wedge T(\omega) \to +\infty$ quand $t \to +\infty$ donc, par la première inégalité de la question 5., on a que $Z_{t\wedge T(\omega)}(\omega)$ est majoré par une fonction tendant vers 0 quand t tend vers $+\infty$. Par ailleurs, $Z_{t\wedge T(\omega)}(\omega)$ est minoré par 0 quelque soit $t \geq 0$. Donc, par le théorème d'encadrement, la limite demandée existe et vaut 0.

   (b) Soit $\omega \in \Omega$ tel que $T(\omega) < +\infty$. Dans ce cas, on a $t \wedge T(\omega) \to T(\omega)$ quand $t \to +\infty$, donc $Z_{t\wedge T(\omega)}(\omega) \to Z_{T(\omega)}(\omega)$.
7. En combinant 6. (a) et 6. (b) on trouve que la limite demandée est $\mathbb{1}_{T<+\infty} Z_T$.
8. Par la question 4., on a $\mathbb{E}(Z_{t\wedge T}) = 1$ $\forall t \geq 0$ donc d'une part :

   $$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}(Z_{t\wedge T}) = 1. \tag{1}$$

   D'autre part, la question 7. et la deuxième inégalité de 5. permettent d'appliquer le théorème de convergence dominée à $(Z_{t\wedge T})_t$ pour affirmer que :

   $$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}(Z_{t\wedge T}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{T<+\infty} Z_T). \tag{2}$$

   D'où le résultat, en égalisant les termes de droite de (1) et (2).
9. On a clairement que :

   $$Z_T = \exp\left(\gamma a - \gamma^2 \frac{T}{2}\right).$$

10. On procède comme suggéré dans l'énoncé : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

    $$1 = \mathbb{E}\left(V_n\right)$$

    en posant :

    $$V_n = \mathbb{1}_{T<+\infty} \exp\left(\frac{a}{n} - \frac{T}{2n^2}\right).$$

    Donc, d'une part,

    $$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(V_n\right) = 1. \tag{3}$$

D'autre part, (V_n) est une suite de v.a. qui converge presque sûrement vers $\mathbb{1}_{T<+\infty}$, et cette suite de v.a. est clairement dominée par la constante $\exp(a)$. Donc, par le théorème de convergence dominée, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(V_n) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{T<+\infty}) = P(T < +\infty). \tag{4}$$

Donc $P(T < +\infty) = 1$ d'après (3) et (4).

11. On a donc $\mathbb{1}_{T<+\infty} Z_T = Z_T$ presque sûrement, donc $\mathbb{E}(Z_T) = 1$. On en déduit immédiatement le résultat annoncé.
12. On prend $\gamma = \sqrt{2\alpha}$ dans la formule de la question précédente et on trouve :

$$L(\alpha) = \exp(-a\sqrt{2\alpha}).$$

13. Pour tout $\alpha > 0$,

$$\frac{\partial L(\alpha)}{\partial \alpha} = -\frac{a}{\sqrt{2\alpha}} \exp(-a\sqrt{2\alpha}),$$

d'où, par le résultat rappelé dans la question,

$$\mathbb{E}(T) = +\infty.$$