

Exercices Analyse 2 – Feuille 4

Intégration des fractions rationnelles et des fractions trigonométriques

Exercice 1

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes :

1. $\frac{x^3 - 3x^2 + x + 1}{x - 3}$
2. $\frac{x^2 - x - 1}{x - 1}$
3. $\frac{2x^2 + 3x + 1}{x - 1}$
4. $\frac{x^2 + 2x - 1}{2x + 3}$

Exercice 2

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes :

1. $\frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 - 5x + 6}$
2. $\frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - 5x + 6}$
3. $\frac{x - 2}{x^2 - 5x + 6}$
4. $\frac{x}{x^2 - 5x + 6}$
5. $\frac{3}{(x - 2)(x^2 - 4x)}$
6. $\frac{x^2 + 2x + 1}{2x^2 - 12x + 16}$

Exercice 3

Calculer :

$$\int_2^3 \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{1 - x^2} dx$$

Exercice 4

Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes :

1. $\frac{x^3 + 1}{x^2 - 5x + 6}$
2. $\frac{3x + 3}{(x - 1)^3}$
3. $\frac{3x + 3}{(x^2 - 2x + 1)^2}$

Exercice 5

Trouver les primitives des fonctions suivantes :

1. $\frac{-x^2 - 2x - 3}{x(x^2 + x + 1)}$
2. $\frac{9x^2 + 5x + 1}{x(x^2 + x + 1)}$

Exercice 6

On rappelle que :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

et que :

$$\sin(a + b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$$

1. Calculer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos^2 x$ et de $\sin^2 x$.
2. En déduire $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$ en fonction de $\cos(2x)$.
3. Calculer :

$$\int_0^\pi \cos^2 x \, dx$$

4. Calculer :

$$\int_0^\pi \cos^4 x \, dx$$

Indication : $\cos^4 x = (\cos^2 x)^2$.

5. Calculer :

$$\int_0^\pi \cos^3 x \, dx$$

Indication : compléter les "?" dans

$$\cos^3 x = ? \times \cos x = (1 - ?^2) \times \cos x$$

puis faire le changement de variable $u = \sin x$.

Exercice 7

1. Calculer

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt$$

en faisant le changement de variables $u = \cos t$.

2. On rappelle que la fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$ par

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

(a) Calculer $(\tan x)'$.

(b) Calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x (1 + \tan x)} dx$$

en faisant le changement de variable $u = \tan x$.

Exercice 8 : Primitive d'arctangente

A l'aide d'une intégration par parties, déterminer :

$$\int_0^1 \arctan x \, dx$$