Préparation du test du 02/03/2010

Durée : 15 minutes. Calculatrices interdites, formulaire du S1 autorisé. Écrire seulement la réponse directement sur la feuille.

1. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale :

$$A = \int_1^2 x \ln(2x) \mathrm{d}x$$

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_1^2 x^n e^{2x} \mathrm{d}x$$

   (a) Calculer I_0.

   (b) Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n et de n.

   (c) Calculer I_1.

3. Soit B l'intégrale :

$$B = \int_0^1 (5x+4)^2 \mathrm{d}x$$

   que l'on souhaite calculer à l'aide du changement de variable $u = 5x + 4$.

   (a) Exprimer $\mathrm{d}u$ en fonction de $\mathrm{d}x$, puis $\mathrm{d}x$ en fonction de $\mathrm{d}u$.

   (b) Réécrire B comme une intégrale portant sur u (on ne demande pas le calcul de B).

→ Correction en page suivante.

Correction préparation du test du 02/03/2010

1. Faisons une intégration par parties en posant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u' & = & x \\ v & = & \ln(2x) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} u & = & \dfrac{x^2}{2} \\ v' & = & \dfrac{(2x)'}{2x} = \dfrac{2}{2x} = \dfrac{1}{x} \end{array}\right.$$

D'où :

$$\begin{array}{lcl} A & = & -\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} \mathrm{d}x + \left[\frac{x^2}{2}\ln(2x)\right]_1^2 \\ & = & -\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{2}\mathrm{d}x + 2\ln 4 - \frac{\ln 2}{2} \\ & = & -\left[\dfrac{x^2}{4}\right]_1^2 + 2\ln 4 - \dfrac{\ln 2}{2} \\ & = & -\left(\dfrac{4}{4} - \dfrac{1}{4}\right) + 2\ln 4 - \dfrac{\ln 2}{2} \\ & = & -\dfrac{3}{4} + 2\ln 4 - \dfrac{\ln 2}{2} \end{array}$$

Remarque : on peut utiliser le fait que : $\ln 4 = \ln(2^2) = 2\ln 2$ pour écrire :

$$A = -\frac{3}{4} + \left(4 - \frac{1}{2}\right)\ln 2 = -\frac{3}{4} + \frac{7}{2}\ln 2$$

2. (a) $I_0 = \displaystyle\int_1^2 e^{2x}\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_1^2 = \frac{e^4 - e^2}{2}$

   (b) $I_{n+1} = \displaystyle\int_1^2 x^{n+1}e^{2x}\mathrm{d}x$; effectuons une IPP avec :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u' & = & e^{2x} \\ v & = & x^{n+1} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} u & = & \dfrac{e^{2x}}{2} \\ v' & = & (n+1)x^n \end{array}\right.$$

   on trouve :

$$I_{n+1} = -\frac{n+1}{2}\int_1^2 x^n e^{2x}\mathrm{d}x + \left[\frac{e^{2x}}{2}x^{n+1}\right]_1^2$$

   soit :

$$I_{n+1} = -\frac{n+1}{2}I_n + \frac{2^{n+1}e^4 - e^2}{2}$$

   (c) Prenons $n = 0$ dans la formule obtenue précédemment :

$$I_1 = -\frac{1}{2}I_0 + \frac{2e^4 - e^2}{2}$$

   soit :

$$I_1 = \frac{e^2 - e^4}{4} + \frac{4e^4 - 2e^2}{4} = \frac{e^2 - e^4 + 4e^4 - 2e^2}{4} = \frac{3e^4 - e^2}{4}$$

3. (a) On a $u = 5x + 4$ donc $\mathrm{d}u = 5\mathrm{d}x$ et ainsi $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{5}$.

   (b) Les bornes deviennent $5 \times 0 + 4 = 4$ et $5 \times 1 + 4 = 9$, d'où

$$B = \int_4^9 u^2 \frac{\mathrm{d}u}{5} = \frac{1}{5}\int_4^9 u^2\mathrm{d}u$$