Préparation du test du 29/03/2010

Durée : 15 minutes. Calculatrices interdites, formulaire du S1 autorisé. On pourra écrire seulement la réponse directement sur la feuille.

1. Soit le polynôme du second degré $p(x) = ax^2 + bx + c$. On suppose que ce polynôme a deux racines réelles notées α_1 et α_2. Donner une factorisation de $p(x)$ comme produit de polynômes de degré 1.
2. Poser la division de $2x^3 - 7x^2 + 6x + 1$ par le polynôme $x^2 - 4x + 4$.
3. Factoriser $x^2 - 4x + 4$.
4. Ecrire la décomposition en éléments simples de
$$\frac{2x^3 - 7x^2 + 6x + 1}{x^2 - 4x + 4}$$
5. Trouver une primitive de cette fonction sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
6. Trouver une primitive de
$$\frac{x^2 + 3x + 4}{x^2 + x + 3}$$
sur $\mathbb{R}$.

→ **Correction en page suivante.**

Correction préparation du test du 29/03/2010

1. C'est un résultat vu en cours : on a $p(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$.
2. Posons la division :

$$\begin{array}{r|l}
2x^3 - 7x^2 + 6x + 1 & x^2 - 4x + 4 \\ \cline{2-2}
-(2x^3 - 8x^2 + 8x) & 2x + 1 \\ \cline{1-1}
x^2 - 2x + 1 & \\
-(x^2 - 4x + 4) & \\ \cline{1-1}
2x - 3 &
\end{array}$$

3. Le discriminant de ce trinôme est 0, il a donc une seule racine double, qui est 2, donc $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$.
4. On a :
$$\frac{2x^3 - 7x^2 + 6x + 1}{x^2 - 4x + 4} = 2x + 1 + \frac{2x - 3}{(x - 2)^2}$$
Nous sommes donc en présence d'un élément de 1ère espèce, avec facteur répété, et on cherche a et b deux réels tels que :
$$\frac{2x - 3}{(x - 2)^2} = \frac{a}{x - 2} + \frac{b}{(x - 2)^2}$$
soit, après mise au même dénominateur, réduction et identification, donne :
$$\left\{ \begin{array}{r} a = 2 \\ -2a + b = -3 \end{array} \right.$$
soit $a = 2$ et $b = 1$. La décomposition en éléments simples de la fraction étudiée est donc :
$$2x + 1 + \frac{2}{x - 2} + \frac{1}{(x - 2)^2}$$
5. Une primitive de cette fonction est donc :
$$x^2 + x + 2\ln|x - 2| - \frac{1}{x - 2}$$
6. Commençons par poser la division du numérateur par le dénominateur :

$$\begin{array}{r|l}
x^2 + 3x + 4 & x^2 + x + 3 \\ \cline{2-2}
-(x^2 + x + 3) & 1 \\ \cline{1-1}
2x + 1 &
\end{array}$$

Nous avons donc :
$$\frac{x^2 + 3x + 4}{x^2 + x + 3} = 1 + \frac{2x + 1}{x^2 + x + 3}$$
Tentons maintenant de factoriser le dénominateur : son discriminant est égal à $1 - 4 \times 3 = -11 < 0$ donc le dénominateur ne peut être factorisé comme produit de deux polynômes de degré 1 à coefficients réels. Nous avons donc un élément de seconde espèce à intégrer. On remarque qu'il est de la forme $\frac{u'}{u}$, avec $u(x) = x^2 + x + 3$, ainsi une primitive de $\frac{x^2 + 3x + 4}{x^2 + x + 3}$ est :
$$x + \ln|x^2 + x + 3|$$