© *Jean-Baptiste APOUNG KAMGA <jean-baptiste.apoung@math.u-psud.fr>*

Examen session 2 du 25 juin 2019
Durée : 2 h

J.-B. Apoung, G. Bonnet, H. Nasser-El-Dine

Note 1 (Consignes générales)**.**

Les téléphones portables et les notes de cours sont interdits. Toute réponse devra être justifiée.
Le sujet est formé de 4 exercices indépendants et sera entièrement traité sur copies.

Exercice - 1 *Interpolation polynomiale*

Dans cet exercice les deux questions sont indépendantes.

Q-1-1 : Question de cours : la table des différences divisées

Dans le désir d'estimer la population d'une ville en 1995 et 1997, un analyste s'est reposé sur la donnée des populations de cette ville pour les années 1976, 1981, 1986, 1991. Il a opté pour l'interpolation de Newton et a généré un table des différences divisées. Il a malheureusement perdu certaines données de sa table, illustrées par les points d'interrogation dans le tableau ci-dessous où la colonne x_i représente les années et la colonne $f(x_i)$ la population associée.

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
1976	?			
1981	592000	?		
1986	?	?	-80	
1991	?	5400	?	$-\frac{8}{3}$

Q-1-1-1 : Aidez l'analyste en complétant sa table des différences divisées.

Q-1-1-2 : Puis fournissez lui l'expression non développée du polynomiale d'interpolation de Newton associée.

Q-1-2 : Troncature de la fonction sin **sur** $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

Dans la pratique, pour des besoins de calcul numérique il n'est pas nécessaire d'évaluer finement certaines fonctions. En effet, la fonction sinus coûtant assez cher à évaluer, dans une certaine expérience numérique donnée on a souhaité ne l'évaluer sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ qu'à 3 bons chiffres près après la virgule. Pour cela on a choisi de la remplacer sur cet intervalle par son polynôme de Taylor de degré n, noté P_n. Il est alors question de déterminer convenablement le degré n de ce polynôme.

Q-1-2-1 : Donner l'expression de P_2, P_3, et P_5.

Q-1-2-2 : On pose $f(x) = \sin(x)$, montrer que

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{(\frac{\pi}{4})^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$$

Q-1-2-3 : Fournir une fonction **`Python`** (voir Listing1) permettant de déterminer le degré minimum n de P_n.

Listing 1: Degre du polynôme de Taylor de sinus pour une erreur d'au plus $tol = 10^{-3}$ sur $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

```
def degreApproxTaylorDeSinusSurPi4(tol):
    # Remarque  m ! se calcule comme np.math.factorial(n)
    # calculer et retourner la bonne valeur de n
```

Exercice - 2 *Intégration numérique*

On souhaite construire une formule de quadrature numérique pour approcher l'intégrale d'une fonction f.

On propose de la chercher sous la forme

$$\int_m^n f(x)\,dx \approx f(0) + 10f(1) + f(2). \tag{1}$$

où c'est plutôt m, n qui sont les inconnues.

Q-2-1 : Déterminer les inconnues m et n permettant de définir cette formule de quadrature.

Q-2-2 : Réécrire cette formule de quadrature sur l'intervalle $[-1, 1]$ et préciser son ordre.

Q-2-3 : En utilisant un résultat du cours, montrer qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de f et de h telle que pour tout f de classe C^2, et pour tout t et h tels que $t, t+h \in I \subset \mathbb{R}$, on ait

$$\left| \int_t^{t+h} f(x)\,dx - \frac{h}{12}\left(f(t + \frac{5}{12}h) + 10f(t + \frac{6}{12}h) + f(t + \frac{7}{12}h) \right) \right| \leq C\,h^3 \sup_{s\in I} |f^{(2)}(s)|. \tag{2}$$

Q-2-4 : On décide d'utiliser cette formule de quadrature comme formule élémentaire pour définir une formule de quadrature composite. On désigne par $I_c(f, a, b, h)$ cette formule de quadrature composite associée à une subdivision uniforme de pas h de $[a, b]$.

Déterminer la plus grande valeur de $r \in \mathbb{N}^*$ et la petite valeur de $s \in \mathbb{N}^*$ telles qu'il existe une une constante $C > 0$ indépendante de h et f tel que

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - I_c(f, a, b, h) \right| \leq C\,h^r \sup_{a\leq x\leq b} |f^{(s)}(x)|. \tag{3}$$

Exercice - 3 *Résolution numérique des équations différentielles ordinaires (EDO)*

On considère l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \ \ t \ \in]t_0, t_0 + T[, \\ x(t_0) = x^0 \end{cases} \tag{4}$$

où x^0 est un réel donné et f une fonction lipschitzienne par rapport à son second argument de constante $L > 0$. C'est-à-dire $|f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z|$, $\forall t \in [t_0, t_0 + T]$, $\forall y, z \in \mathbb{R}$.

On approche la solution de cette équation différentielle par un schéma numérique. Pour cela on introduit une subdivision $t_n = t_0 + n\Delta t, n = 0, \ldots, N$ de $[t_0, t_0 + T]$ avec $\Delta t = \frac{T}{N}$ où $N \in \mathbb{N}^*$. Et on pose x_n une valeur approchée de $x(t_n)$, construit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = x_n + \Delta t\, f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + \frac{\Delta t}{2} f(t_n, x_n)\right),\ n = 0, \ldots, N-1, \\ x_0 = x^0 \end{array} \right. \tag{5}$$

Q-3-1 : Quel nom donne-t-on à ce schéma ?

Q-3-2 : Etude de consistance

Q-3-2-1 : Définir l'erreur de consistance ξ_n à l'instant t_n de ce schéma numérique.

Q-3-2-2 : Calculer cette erreur de consistance dans le cas de l'équation $\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = 3t^2,\ t \in]t_0, t_0 + T[, \\ x(t_0) = 0 \end{array} \right.$

Q-3-2-3 : En déduire que si le schéma (5) est consistant il le sera à l'ordre **au plus** 2.

Q-3-2-4 : Préciser la fonction $\Phi(t, y, \Delta t)$ telle que le schéma (5) s'écrive $x_{n+1} = x_n + \Delta t \Phi(t, x_n, \Delta t)$.

Q-3-2-5 : En déduire, via un résultat du cours, que le schéma (5) est consistant d'ordre au moins 1.

Q-3-2-6 : Pouvez-vous montrer que le schéma (5) est consistant d'ordre exactement 2 ?

Q-3-3 : Etude de stabilité

Q-3-3-1 : En utilisant la fonction Φ, montrer que le schéma (5) est stable.

Q-3-3-2 : Conclure que le schéma (5) est convergent et préciser son ordre de convergence.

Q-3-3-3 : Pouvez-vous donner une estimation d'erreur de convergence pour ce schéma, c'est-à-dire une majoration de $\max\limits_{0 \leq n \leq N} |x(t_n) - x_n|$ en fonction de Δt, de T et des constantes de consistance et de stabilité ?

Exercice - 4 *Résolution numérique des équations ordinaires (EO)*

On va essayer de vérifier si la méthode de Newton peut être divergente quelque soit la donnée initiale.

On considère sur $[-1, 1]$ la fonction $f(x) = sign(x)\sqrt{|x|}$, où $sign(x) = \left\{ \begin{array}{rl} -1 & \text{si} \quad x < 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \\ 1 & \text{si} \quad x > 0, \end{array} \right.$

Q-4-1 : Montrer que f est continue sur $[-1, 1]$ et y admet un unique zéro (c'est-à-dire un unique x^* tel que $f(x^*) = 0$).

Q-4-2 : Montrer que f est dérivable sur $[-1, 0[\cup]0, 1]$ et calculer sa dérivée.

Q-4-3 : Divergence de la méthode de Newton.

Appliquer la méthode de Newton à la recherche du zéro de f et conclure qu'elle diverge quelque soit la donnée initiale x_0.

Q-4-4 : Montrons que ce résultat n'est pas alarmant.

Q-4-4-1 : Déterminer la solution analytique de l'équation différentielle suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} t - \frac{x(t)}{x'(t)} = -t,\ t \in]t_0, t_0 + T[, \\ x(t_0) = x^0 \end{array} \right. \tag{6}$$

Q-4-4-2 : Conclure que seule une classe de fonction (les multiples constants de la fonction f donnée ci-dessus) présenteront le caractère oscillant observé de la méthode de Newton autour de leur zéro, pour toute la donnée initiale.