MATH 104 Groupe A4
Séance du 07 mai 2020

A faire :

1- sur la fiche 5 deTD : **8h15**
S'assurer d'avoir bien compris le contenu de la fiche 5 sur les nombres complexes

2- Passer à la fiche de TD 5 : Sur les courbes paramétrées

Objectif : traiter les exercices 1, 3

Début et pendant séance :

- **M'informer si vous rencontrez des difficultés (*je suis joignable pendant le créneau de la séance, comme la semaine dernière*).**
- **Penser à remplir et me transmettre votre fichier suivi voir page web (*récupérer le fichier et modifier le si nécessaire*)**
- **J'attends vos questions.**

Fin séance :
Ce fichier sera enrichi d'indications en fin de séance. (*Comme les seances précédentes*).

Thème 1 : Etude d'une courbe paramétrée : **8 h 20**

Il est question de tracer une courbe donnée par

$x(t)=f(t),\ y(t)=g(t)$ **pour** t **dans** R

Exercice 1 : $x(t)=\cos(t)^3,\ y(t)=\sin(t)^3$

Suivre les les indications de l'énoncé.

Question 1 : Etude des symétries **8 h 20**

!!!! Corrigé dans 30 min !!!!!

8 h 50

TD 6 — COURBES PARAMETREES

Q1 Etude d'une courbe paramétrée

Exercice 1 $t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$

Commençons par donner le domaine de définition (d'étude)

$t \mapsto \cos^3 t$ est définie pour $t \in \mathbb{R}$

$t \mapsto \sin^3 t$ —— // ——

D'où le domaine de définition $D_E =]-\infty, +\infty[$.

1. Etude des symétries.

Ceci va permettre de réduire le domaine d'étude

L'exercice demande de réduire le domaine d'étude à $[0, \frac{\pi}{4}]$.

- $t \mapsto \cos^3 t = x(t)$ est périodique de période 2π
- $t \mapsto \sin^3 t = y(t)$ est périodique de période 2π.

Le domaine d'étude se réduit à ce stade à un intervalle de longueur 2π

On va le prendre symétrique par rapport à 0 afin d'exploiter d'autres symétries : $D_E = [-\pi, \pi]$.

$\forall t \in D_E$

$\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$ → courbe symétrique par rapport à l'axe des abscisses

Donc on réduit D_E à $D_E = [0, \pi]$ car on pourra déduire la portion $t \in [-\pi, 0]$ par symétrie par rapport à l'axe $y = 0$.

$\forall t \in D_E = [0, \pi]$, on a

- $\begin{cases} x(\pi - t) = \cos^3(\pi - t) = (-\cos t)^3 = -x(t) \\ y(\pi - t) = \sin^3(\pi - t) = \sin^3(t) = y(t). \end{cases}$

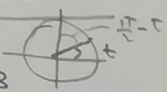
"Ceci signifie que si $M_1(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ est sur la courbe, le point $M_2(t) = \begin{pmatrix} -x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ l'est également"

Donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Comme pour $t \in [0, \pi]$, $\pi - t$ se déduit de t par symétrie par rapport à $\frac{\pi}{2}$ (car $\frac{(\pi - t) + t}{2} = \frac{\pi}{2}$)

Le domaine d'étude se réduit à $D_E = [0, \frac{\pi}{2}]$ la branche $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ se déduira par symétrie par rapport à l'axe $x = 0$.

- $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a



$x(\frac{\pi}{2} - t) = \cos^3(\frac{\pi}{2} - t) = (\sin t)^3 = y(t)$

$y(\frac{\pi}{2} - t) = \sin^3(\frac{\pi}{2} - t) = (\cos t)^3 = x(t)$.

Ainsi, si $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ est sur la courbe il en sera de même de $M^*(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ x(t) \end{pmatrix}$

Donc la courbe est symétrique par rapport à la droite $y = x$

Comme $\frac{(\frac{\pi}{2} - t) + t}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Le domaine d'étude se réduit à $D_E = [0, \frac{\pi}{4}]$, la branche $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ se déduisant par symétrie par rapport à l'axe $y = x$.

Le domaine d'étude est donc $D_E = [0, \frac{\pi}{4}]$

Question 2 : tableau de variation et tangentes **8 h 50**

!!!! Corrigé question 2 dans 30 min !!!!!

9 h 20

2- Calcul des dérivées de x, y, tableau de variation, vecteur directeur de la tangente à la courbe en $t=0$ et $t=\frac{\pi}{4}$

Soit $t \in [0, \frac{\pi}{4}] = \Delta_t$,

- $x(t) = \cos^3 t$ est dérivable et on a

$x'(t) = -3 \sin t \cos^2 t$

Elle est un signe constant (≤ 0) sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ i.e $x'(t) \leq 0 \; \forall t \in [0, \frac{\pi}{4}]$

- De même

$y(t) = \sin^3 t$ est dérivable sur Δ_t avec $\forall t \in \Delta_t$,

$y'(t) = 3 \cos(t) \sin^2 t \geq 0$

on a aussi $y'(t) \geq 0 \; \forall t \in [0, \frac{\pi}{4}]$

- limites aux bornes de Δ_t

$\lim_{t \to 0^+} x(t) = \lim_{t \to 0^+} \cos^3 t = 1$

$\lim_{t \to \frac{\pi}{4}^-} \cos(t) = \lim_{t \to \frac{\pi}{4}^-} \cos^3 t = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\lim_{t \to 0^+} y(t) = \lim_{t \to 0^+} \sin^3 t = 0$

$\lim_{t \to \frac{\pi}{4}} y(t) = \lim_{t \to \frac{\pi}{4}} \sin^3 t = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

- Dérivées (si possibles) aux bornes du domaine :

$x'(0) = 0$, $x'(\frac{\pi}{4}) = -3 \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{2\sqrt{2}}$

$y'(0) = 0$. $y'(\frac{\pi}{4}) = 3 \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

d'où le tableau de variation

t	0		$\frac{\pi}{4}$
$x'(t)$	0	$-$	$-\frac{3}{2\sqrt{2}}$
$y'(t)$	0	$+$	$3/2\sqrt{2}$
$x(t)$	1	↘	$1/2\sqrt{2}$
$y(t)$	0	↗	$1/2\sqrt{2}$

- Equation de la tangente en $t=0$

On a $\begin{cases} x'(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ ainsi le point $M(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est singulier.

Par conséquent pour déterminer la tangente du support de la courbe en $M(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ on va calculer

$$\lim_{t \to 0} \frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin^3 t - 0}{\cos^3 t - 1}$$

On utilise les DL

$\sin^3 t = t^3 - \frac{t^5}{2} + t^5 \varepsilon_1(t)$

$\cos^3 t - 1 = -\frac{3t^2}{2} + \frac{7t^4}{8} + t^5 \varepsilon_2(t)$

avec $\lim_{t \to 0} \varepsilon_1(t) = 0$ $\lim_{t \to 0} \varepsilon_2(t) = 0$

d'où

$$\lim_{t \to 0} \frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \lim_{t \to 0} \frac{t^3\left(1 - \frac{t^2}{2} + t^2 \varepsilon_1(t)\right)}{t^2\left(-\frac{3}{2} + \frac{7}{8} t^2 + t^3 \varepsilon_2(t)\right)} = 0$$

Ainsi, la pente de la tangente en 0 à la courbe est $m = 0$.

L'équation de la tangente est $y - 0 = m(x-1)$ i.e $y = 0$

Le vecteur directeur donc: $\vec{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Vecteur directeur de la tangente en $t = \frac{\pi}{4}$.

Comme $\begin{cases} x'(\frac{\pi}{4}) = -\frac{3}{2\sqrt{2}} \\ y'(\frac{\pi}{4}) = \frac{3}{2\sqrt{2}} \end{cases}$

le point $M(\frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} 1/2\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ est régulier

Le vecteur directeur de la tangente en $t = \pi/4$ est donc $v(t) = \begin{pmatrix} x'(\pi/4) \\ y'(\pi/4) \end{pmatrix} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On peut prendre $v(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui est plus simple à manipuler

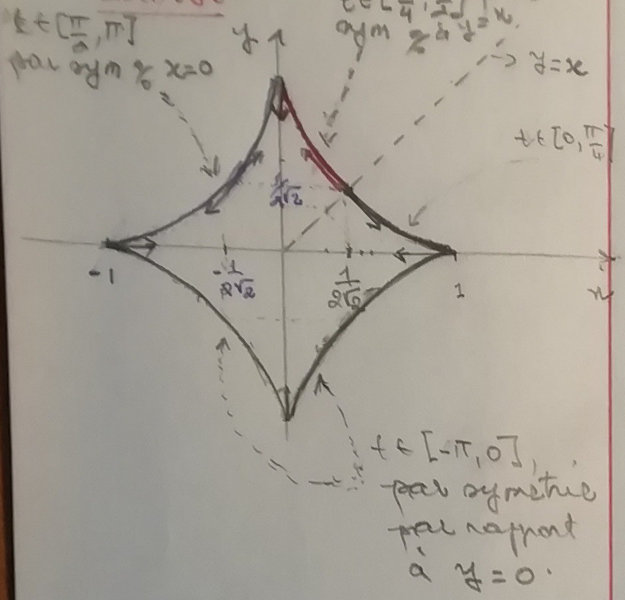
i.e dans le plan (x, y), la tangente est parallèle à la 2nd bissectrice

Question 3 : représentation graphique **9 h 20**

!!!! Corrigé question 2 dans 15 min !!!!!

9 h 35

3/ Déduction du tracé de la courbe.



Thème 2 : Etude de points singuliers d'une courbe paramétrée 9 h 35

Exercice 3 : Etude locale de points singuliers

!!! Corrigé dans 20 min !!!!!

9 h 55

02 | Etude de points singuliers d'une courbe paramétrée

Exercice 3 : Etude locale, points singuliers

- Trouvons les points singuliers
- Vecteurs directeurs de la tangente
- Position de la courbe par rapport à la tangente.

Cas (C^1) $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^6 \end{cases}$

Le domaine d'étude de cette courbe est $]-\infty, +\infty[$.

Mais comme $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$

- On réduit le domaine d'étude à $\boxed{D_E = [0, +\infty[}$

- Calculons les dérivées :

$t \mapsto x(t)$ est C^1 sur $[0, +\infty[$, avec $x'(t) = 2t$

$t \mapsto y(t)$ est C^1 sur $[0, +\infty[$ avec $y'(t) = 6t^5$

- Déterminons les points singuliers

$M(t)$, est un point singulier si $\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} 2t = 0 \\ 6t^5 = 0 \end{cases}$

D'où $t = 0$

$\boxed{\text{On a donc l'unique point singulier } M(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

- Vecteur directeur de la tangente en ce point :

Ce point étant singulier, on a $\begin{cases} x'(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.

On va donc essayer de déterminer la ~~pente~~ pente de la tangente en ce point :

$$m = \lim_{t \to 0} \frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \lim_{t \to 0} \frac{t^6}{t^2} = 0$$

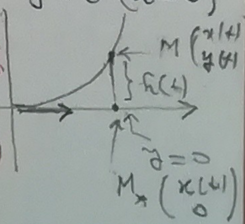
(ie l'équation de la tangente au point $M\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est $y - 0 = m(x-0) = 0$
ie $y = 0$.)

$\boxed{\text{D'où le vecteur directeur de la tangente } u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

- Position de la courbe par rapport à la tangente en $M(0)$

L'équation de la tangente est $y = 0$. ie $y = 0(x - 0)$

Pour la position de la courbe et la tangente on étudie :



$h(t) = y(t) - y(0) - m(x(t) - x(0))$

ie $h(t) = y(t) = t^6$

Or $h(t) \geq 0$ $\forall t \in [0, +\infty[$.

$\boxed{\text{D'où la courbe est au dessus de la tangente au voisinage du point singulier } M(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

!

Cas d'application : $x(t)=2t^2$, $y(t)=t^2-t^3$ **avec t dans R** 9h55

!!!! Corrigé dans 20 min !!!!! 10h15

(cas) $\begin{cases} x(t)=2t^2 \\ y(t)=t^2-t^3 \end{cases}$

Le domaine d'étude est $]-\infty,+\infty[$.

· Mais comme $\begin{cases} x(-t)=2t^2=x(t) \\ y(-t)=t^2+t^3 \neq \pm y(t) \end{cases}$

on ne voit donc pas apparaître une symétrie.

D'où $D_E=]-\infty,+\infty[$.

· Calculons les dérivées.

$t\mapsto x(t)$ et $t\mapsto y(t)$ sont de classe C^1 sur $]-\infty,+\infty[$ avec

$$\begin{cases} x'(t)=4t \\ y'(t)=2t-3t^2 \end{cases}$$

· Déterminons les points singuliers

$M(t)$ est point singulier ssi $\begin{cases} x'(t)=0 \\ y'(t)=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 4t=0 \\ 2t-3t^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ \text{et} \\ t(2-3t)=0 \end{cases} \Rightarrow t=0.$$

Ainsi, $M\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, est l'unique point singulier associé à $t=0$.

Comme précédemment, en $M\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ on a :

$$\begin{cases} x'(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

on cherche alors la pente de la tangente en $t=0$.

$$\lim_{t\to 0}\frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2+t^3}{2t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1+t}{2}=\frac{1}{2}$$

Le vecteur directeur de la tangente au point $M\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ est donc $u=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ on peut le normaliser si nécessaire.

$$v=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

Position de la courbe par rapport à la tangente au voisinage de $t=0$.

L'équation de la tangente est $y-0=\frac{1}{2}(x-0)$

Ainsi, au voisinage de $t=0$, un point sur la courbe a pour coordonnées $M(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2t^2\\t^2-t^3\end{pmatrix}$

et un point sur la tangente de même abscisse que $M(t)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x(t)\\\frac{1}{2}x(t)\end{pmatrix}$

Soit $\begin{pmatrix}2t^2\\\frac{1}{2}2t^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2t^2\\t^2\end{pmatrix}$

L'écart en ordonnées entre ces deux points est donc

$$h(t)=(t^2-t^3)-t^2$$

RQ : on reconnait la formule du cours $h(t)=(y(t)-0)-\frac{1}{2}(x(t)-0)$

Donc $h(t)=-t^3$

Or

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$-t^3=h(t)$		$+$	0	$-$	

comme x^3 ? on a 2 branches

Ainsi, $h(t)$ change de signe.

Par conséquent au voisinage du point $M\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ i.e $t=0$,

- La courbe est au dessus de la tangente pour $t<0$
- La courbe est en dessous de la tangente pour $t>0$