**MATH 104 Groupe A4**
**Séance du 23 avril 2020**

**A faire :**

**1- Achever la fiche 4 deTD :** **8h15**

***S'assurer d'avoir bien compris les asymptotes :***

- ***leur détermination***
- ***leur positionnement par rapport au graphe de la fonction***

**2- Passer à la fiche de TD 5 : Sur les nombres complexes**

***Objectif : traiter les exercices 1, 2, 3, 4***

**Début et pendant séance :**

- **M'informer si vous rencontrez des difficultés (*je suis joignable pendant le créneau de la séance, comme la semaine dernière*).**
- **Penser à remplir et me transmettre votre fichier suivi voir page web (*récupérer le fichier et modifier le si nécessaire*)**
- **J'attends vos questions.**

**Fin séance :**

**Ce fichier sera enrichi d'indications en fin de séance. (*Comme les seances précédentes*).**

**INDICATIONS :** **8 h 45**

**Thème 1 : Formes algénbriques ét trigonométrique des complexes**

***Pour un nombre complexe z, (voir cours page)***
***l'écriture*** $z = x + i\ y$ ***est la forme algébrique : x et y sont deux réels***
***l'écriture*** $z = \rho\, e^{i\theta}$ ***est la forme trigonométrique :***

- $\rho$ ***r est un réel positif ( le module de z)***
- $\theta$ ***a (argument de z) un réel déterminé modulo*** $2\pi$
- ***On le prendra généralement dans*** $[0, 2\pi]$

**Il est question de passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique**

:                                                                                  : **8h55**

# TD5 NOMBRES COMPLEXES

## 01 | Forme algébrique et trigonométrique des complexes

### Exercice 1

1. **Ecriture sous forme trigonométrique**

**Cas $1+i\sqrt{3}$**

Il est question de déterminer $\rho \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que

$$1+i\sqrt{3} = \rho e^{i\theta} \quad (*)$$

En prenant le module de part et d'autre de l'égalité on a:

$$|1+i\sqrt{3}| = \rho\,|e^{i\theta}| \quad \text{car } \rho \geq 0$$

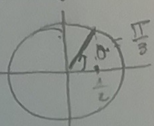
Soit $\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \rho$ car $|e^{i\theta}| = 1$

On obtient donc $\underline{\rho = 2}$.

Et $(*)$ devient

$$1+i\sqrt{3} = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$$

D'où $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$




Donc $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Il suffit de prendre un de ces angles. Puisque ce qui nous intéresse c'est la valeur de $e^{i\theta}$.

Or

$$e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{3}+i2k\pi}$$
$$= e^{i\frac{\pi}{3}}\, e^{i2k\pi}$$
$$= e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{car } e^{i2k\pi} = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = 1.$$

Donc :

$$\boxed{1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

On retient de ce qui précède que la forme trigonométrique d'un nombre complexe $z$ est

$$z = \rho e^{i\theta} \quad \text{avec} \begin{cases} \rho = |z| \\ \cos\theta = Re\left(\frac{z}{\rho}\right) \\ \sin\theta = Im\left(\frac{z}{\rho}\right) \end{cases}$$

Et il suffira de prendre un $\theta \in [0, 2\pi]$

**Forme trigonométrique de $1+i$**

__module:__ $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} = \rho$

__argument:__

$$\begin{cases} \cos\theta = Re\left(\frac{z}{\rho}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = Im\left(\frac{z}{\rho}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

D'où $\boxed{1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}}$

RQ: Dans la pratique on procède de façon directe:

$|1+i| = \sqrt{2}$.

facile à voir

D'où

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

D'où

$$1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

: **9h10**

**Question 2 : On peut s'épargner des calculs fastidieux**

**Question 3 : Se rappeler des formules** $(a\,b)^n = a^n\,b^n$ **,** $(e^a)^n = e^{na}$

2. Forme algébrique et trigonométrique de $Z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$

· Forme algébrique :

Il est question d'écrire $Z$ sous la forme $Z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

On peut obtenir le résultat en résolvant :

$$a + ib = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$$

qu'on écrit sous la forme

$$(a+ib)(1+i) = 1+i\sqrt{3} \quad (*)$$

Je vous laisse poursuivre les calculs (Remarquez que vous pouvez simplifier les calculs en multipliant chaque membre de $(*)$ par $1-i$ qui est le conjugué de $1+i$ !)

et vous propose une approche directe : " rendre rationnel le dénominateur ".

On multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur :

$$Z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{(1+i\sqrt{3})(\overline{1+i})}{(1+i)(\overline{1+i})} = \frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{|1+i|^2}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}+i(-1+\sqrt{3})}{1+1}$$

D'où

$$\boxed{Z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{-1+\sqrt{3}}{2}}$$

· Forme trigonométrique

On peut procéder comme à la question 1 avec ce résultat qu'on vient d'obtenir (je vous laisse faire ça).

Mais il est plus simple d'utiliser les formes trigonométriques du numérateur et dénominateur.

D'après la question 1, on a :

$$1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$1+i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$

D'où

$$Z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{2}}\,e^{i\frac{\pi}{3}}\,e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{3}-i\frac{\pi}{4}}$$

donc

$$\boxed{Z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}}$$

3°/ Expression de $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\cos\frac{\pi}{12}$.

Identifiant les expressions de $Z$ on a :

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{-1+\sqrt{3}}{2} = Z = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

i.e. $e^{i\frac{\pi}{12}} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i\,\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

or $\swarrow$ $\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$

Donc $\boxed{\cos\frac{\pi}{12} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}$ , $\boxed{\sin\frac{\pi}{12} = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}$

4. Forme algébrique de $Z^{1000}$

$$Z^{1000} = \left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{1000} = (\sqrt{2})^{1000}\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{1000}$$

$$= 2^{500}\,e^{i(\cancel{\;82\;}+\pi+\frac{\pi}{3})} = 2^{500}\,e^{i\pi}\,e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$= -2^{500}\,e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Donc

$$\boxed{Z^{1000} = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{1000} = -2^{500}\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

: 9h10

**Exercice 2 :** **Ceci est une manipulation des propriété de la conjugaison de nombres complexes**

**La Quesion 3 est laissé en exercice à faire par vous !!!!!!!!!!!**

**Exercice 3 :** ***Utiliser la forme trigonométrique du complexe***

: 9h45

## Exercice 2

$N \in \mathbb{N}$ somme de 2 carrés $\Rightarrow N = a^2+b^2$, $a, b \in \mathbb{N}$

1. $N_1 = a^2+b^2$, $N_2 = c^2+d^2$

$z_1 = a+ib$, $z_2 = c+id$.

expression de $N_1, N_2$ en f$^{n}$ de $z_1, z_2$

On :

$$N_1 = |z_1|^2 = z_1\bar{z}_1$$

$$N_2 = |z_2|^2 = z_2\bar{z}_2$$

2) Déduisons que $N_1N_2$ est somme de 2 carrés.

$$N_1N_2 = z_1\bar{z}_1 z_2\bar{z}_2$$

$= z_1z_2\,\bar{z}_1\bar{z}_2$ commutativité du produit

$= z_1z_2\,\overline{z_1z_2}$ car $\overline{z_1z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$

$$= |z_1z_2|^2$$

or $|z_1z_2|^2 = \left(\mathrm{Re}(z_1z_2)\right)^2 + \left(\mathrm{Im}(z_1z_2)\right)^2$

$= \left(|\mathrm{Re}(z_1z_2)|\right)^2 + \left(|\mathrm{Im}(z_1z_2)|\right)^2$

ok . ces valeurs absolues sont des entiers.

3. Demontrons que si un entier $N$ est somme de deux carrés alors pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, $N^p$ est aussi somme de deux carrés

Je vous laisse chercher ça.

Indications :

- si $N = a^2+b^2$, on pose $z = a+ib$

et $N = z\bar{z}$

- ainsi $N^p = (z\bar{z})^p = z^p\bar{z}^p = z^p\overline{z^p}$

## Exercice 3 :

Entiers relatifs $n$ tels que $(\sqrt{3}+i)^n$ soit réel ou soit imaginaire pur

Utilisons la représentation trigonométrique de $\sqrt{3}+i$ pour exprimer $(\sqrt{3}+i)^n$.

$$|\sqrt{3}+i| = \sqrt{3+1} = 2$$

donc $\dfrac{\sqrt{3}+i}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6} = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

D'où $\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ (\sqrt{3}+i)^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}}}$

ie : $(\sqrt{3}+i)^n = 2^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{6} + i\sin\dfrac{n\pi}{6}\right)$.

Et :

$(\sqrt{3}+i)^n$ réel ssi $\sin\dfrac{n\pi}{6} = 0$

$(\sqrt{3}+i)^n$ imaginaire pure ssi $\begin{cases} \cos\dfrac{n\pi}{6} = 0 \\ \sin\dfrac{n\pi}{6} \neq 0 \end{cases}$

Or $\sin\dfrac{n\pi}{6} = 0 \Rightarrow \dfrac{n\pi}{6} = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow n = 6k \quad k \in \mathbb{Z}$.

$\cos\dfrac{n\pi}{6} = 0 \Rightarrow \dfrac{n\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow n = 3+6k \quad k \in \mathbb{Z}$.

Donc :

$\boxed{(\sqrt{3}+i)^n \text{ réel ssi } n = 6k,\ k \in \mathbb{Z}}$

$\boxed{(\sqrt{3}+i)^n \text{ imaginaire pur si } n = 3+6k,\ k \in \mathbb{Z}}$

## Thème 2 : Racines carrées et racines de polynômes de second degré :9h45

- **Racine carrée : soit $z=a+ib$ donné, on cherche x,y tels $(x+iy)^2=a+ib$**
- **Résolution d'équation $az^2+bz+c=0$ , a non nul : on remarque qu'il faut pouvoir calculer les racines carrées du discriminant $\Delta=b^2-4ac$ En effet utilisant de débutde développement d'un carré on a $az^2+bz+c=0$ devient**

$$a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a}-c \quad \text{soit} \quad \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}$$

- **Ainsi tout dans cette partie se réduit au calcul des racines carrées**

**JETEZ UN COUD D'OEIL SUR LE COURS SI NECESSAIRE ! !!!!! :9h 50**

**DETAILLS et CORRIGE DE EXERCICE 4 EN FIN DE SEANCE : : 10h 15**

02 | Racines carrées et racines de polynômes de second degré

Exercice 4 :

Calcul de racines carrées sous forme algébrique des nombres complexes.

Démarche générale :

Soit $z=a+ib$, on cherche $x, y$ tq : $(x+iy)^2=z$.

- On développe cette équation et on obtient : $\begin{cases} x^2-y^2=a \\ 2xy=b \end{cases}$
- On complète ~~cette~~ équations par une information sur les modules

$$x^2+y^2=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

d'où le système :

$$\begin{cases} x^2-y^2=a & (1) \\ x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} & (2) \\ 2xy=b & (3) \end{cases}$$

- On utilise les deux premières équations pour déterminer toutes les valeurs de $x$ et $y$.
- Puis on utilise la dernière (i.e (3)) pour sélectionner les bonnes valeurs de $x$ et $y$ en disant que le produit $xy$ a le signe de $b$.

Cas $15-8i$

On cherche $x, y \in \mathbb{R}$ tq : $(x+iy)^2=15-8i$

Pour cela, on résout :

$$\begin{cases} x^2-y^2=15 & (1) \\ x^2+y^2=|15-8i|=17 & (2) \\ 2xy=-8 & (3) \end{cases}$$

D'où $\begin{cases} 2x^2=32 \\ 2y^2=2 \\ 2xy=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=16 \\ y^2=1 \\ xy=-4 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} x=4 \text{ ou } x=-4 \\ y=1 \text{ ou } y=-1 \\ xy=-4 \quad (\text{ie } x\cdot y<0) \end{cases}$

D'où les solutions

$x=4$ et $y=-1$ ou $x=-4$ et $y=-1$

Conclusion :

$\boxed{\text{Les racines carrées de } 15-8i \text{ sont } z_1=4-i \text{ et } z_2=-4+i}$

Cas $1+i\sqrt{3}$

Solution : $\pm\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)$.

!!! Procédez comme ci-dessus !!!!!

Voici une autre approche :

- les racines sont toujours opposées il suffit donc d'en déterminer une et déduire l'autre.

Or $1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

Donc $z_1=\text{"}\sqrt{1+i\sqrt{3}}\text{"}=(1+i\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{6}}$

ie $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ et $z_2=-z_1$

ie $\boxed{\begin{array}{l} z_1=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) \\ z_2=-\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) \end{array}}$