MATH 104 Groupe A4
Séance du 30 avril 2020

A faire :

1- la fiche 5 deTD : **8h15**

S'assurer d'avoir bien compris les exercices :1 à 4

- ***formes algébrique et trigonométrique des complexes***
- ***calcul des racines carrées des nombres complexes***

2- Travail sur la fiche suite de la fiche TD 5 :

Objectif : - Achever thème 2 : équations algébrique du 2nd ordre dans C
exercices 6 et 8
- Achever le thème 3 : Racines n-ième
exercices 9, 11, 12
- s'essayer au thème 4 : Aller plus loin
exercices 13, 14, 16

Début et pendant séance :

- **M'informer si vous rencontrez des difficultés (*je suis joignable pendant le créneau de la séance, comme la semaine dernière*).**
- **Penser à remplir et me transmettre votre fichier suivi voir page web (*récupérer le fichier et modifier le si nécessaire*)**
- **J'attends vos questions.**

Fin séance :
Ce fichier sera enrichi d'indications en fin de séance. (*Comme les seances précédentes*).

INDICATIONS : **8 h 20**

Thème 2 : Racines carrées et racines de polynômes de second degré :

- **Racine carrée : soit** $z=a+ib$ **donné, on cherche x,y tels** $(x+iy)^2=a+ib$
- **Résolution d'équation** $az^2+bz+c=0$ **, a non nul : on remarque qu'il faut pouvoir calculer les racines carrées du discriminant** $\Delta=b^2-4ac$ **En effet utilisant de début de développement d'un carré on a** $az^2+bz+c=0$ **devient** $a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a}-c$ **soit**
$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}$$
- ***Ainsi tout dans cette partie on sera amené à calcuer les racines carrées des complexes***

Exercice 6 : : 8h20

On résout quelques équations algébriques du second ordre dans C

Les étapes sont : Calcul du discriminant - racines carrées du discriminant -Déduction des solutions de l'équation algébrique **: 8h40**

Exercice 6 — Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations algébriques du 2^{nd} ordre

$az^2+bz+c=0$, $a\in\mathbb{C}^*$

1. Cas $z^2-2iz-1+2i=0$

• Calcul du discriminant

$$\Delta=(2i)^2-4(-1+2i) \qquad \Delta=b^2-4ac$$
$$=-4+4-8i$$
$$=-8i$$
$$=8e^{-i\frac{\pi}{2}}=\left(2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^2$$
$$=\left(2\sqrt{2}\left(\cos-\tfrac{\pi}{4}+i\sin-\tfrac{\pi}{4}\right)\right)^2$$
$$=[2(1-i)]^2$$

• Calcul des racines carrées du discriminant.

On n'a besoin que d'une racine l'autre étant son opposée.

$\delta=2-2i$ est tel que $\delta^2=\Delta$.

• Déduction des solutions de l'équation algébrique.

$$z_1=\frac{-b-\delta}{2a}=\frac{2i-2+2i}{2}=-1+2i$$
$$z_2=\frac{-b+\delta}{2a}=\frac{2i+2-2i}{2}=1$$

En conclusion, les solutions de l'équation $z^2-2iz-1+2i=0$ sont : $z_1=-1+2i$ et $z_2=1$

2. Cas $iz^2+(4i-3)z+i-5=0$

• calcul du discriminant.

$$\Delta=(4i-3)^2-4i(i-5)$$
$$=-16+9-24i+4+20i$$
$$=-3-4i$$

• racines carrées de Δ

Soit $\delta=a+ib$ tel que $\delta^2=\Delta$

on a : $\begin{cases}a^2-b^2=-3\\ 2ab=-4\\ a^2+b^2=|\Delta|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5\end{cases}$

D'où $\begin{cases}a^2=1\\ b^2=4\\ ab<0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}a=1\\ b=-2\end{matrix}$ ou $\begin{matrix}a=-1\\ b=2\end{matrix}$

Donc les racines de Δ sont : $\delta_1=1-2i$ et $\delta_2=-1+2i$

• Déduction des racines de l'équation

$$z_1=\frac{-b+\delta_1}{2a}=\frac{3-4i+1-2i}{2i}=\frac{2-3i}{i}=-3-2i$$
$$z_2=\frac{-b+\delta_2}{2a}=\frac{3-4i-1+2i}{2i}=\frac{1-2i}{i}=-2-i$$

Les solutions de $iz^2+(4i-3)z+i-5=0$ sont $z_1=-3-2i$ et $z_2=-2-i$.

3. Cas $z^2-(7+i)z+12+3i=0$

• $\Delta=(7+i)^2-4(12+3i)$
$$=49-1+14i-48-12i$$
$$=2i=2e^{i\frac{\pi}{2}}=\left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2$$
$$=\left(\sqrt{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}+i\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^2=(1+i)^2$$
$$=(1+i)^2$$

D'où les solutions de l'équation

$$z_1=\frac{7+i-(1+i)}{2}=3$$
$$z_2=\frac{7+i+1+i}{2}=4+i$$

i.e. les solutions de l'équation $z^2-(7+i)z+12+3i=0$ sont $z_1=3$ et $z_2=4+i$

Exercice 8 : :8h55

utilisation des sommes et produit des racines de l'équation du second ordre

- **Déduction des solutions de** $z^2-2i\sin(\theta)z-1=0$
- **Déduction de solution de** $z^2-e^{i\theta}z+\frac{i}{2}\sin(\theta)=0$

Exercice 8

Soit z_1 et z_2 les 2 racines de $az^2+bz+c=0$, $a\in\mathbb{C}^*$, $b,c\in\mathbb{C}$

· Montrons que $z_1+z_2=-\frac{b}{a}$, $z_1z_2=\frac{c}{a}$

z_1, z_2 solutions de $az^2+bz+c=0$ implique qu'on a la factorisation :

$az^2+bz+c = a(z-z_1)(z-z_2)$ $\forall z\in\mathbb{C}$

ie

$az^2+bz+c = az^2-a(z_1+z_2)z+az_1z_2$ $\forall z\in\mathbb{C}$

Cette égalité ayant lieu pour tout $z\in\mathbb{C}$, on a égalité des coefficients

ie $\begin{cases} b=-a(z_1+z_2)\\ c=az_1z_2\end{cases}$ d'où $\begin{cases} z_1+z_2=-\frac{b}{a}\\ z_1z_2=\frac{c}{a}\end{cases}$

· Utilisation de ce résultat

- résolution de $z^2-2i\sin\theta z-1=0$

D'après le résultat ci-dessus on a : $\begin{cases} z_1+z_2=2i\sin\theta\\ z_1z_2=-1\end{cases}$

Il suffit donc de déterminer deux complexes vérifiant ces deux relations.

L'idéal serait de les voir sauter des yeux. Çà-dire sans trop d'effort.

Puisque ce n'est pas très évident, je vous propose une approche systématique :

"On va ajouter une relation sur z_1-z_2"

En effet,

$(z_1-z_2)^2 = z_1^2+z_2^2-2z_1z_2$

$(z_1+z_2)^2 = z_1^2+z_2^2+2z_1z_2$

D'où $(z_1-z_2)^2 = (z_1+z_2)^2-4z_1z_2$

$= (2i\sin\theta)^2-4(-1)$

$= -4\sin^2\theta+4$

$= 4(1-\sin^2\theta)$

$= (2\cos\theta)^2$

ie $z_1-z_2=2\cos\theta$ ou $z_1-z_2=-2\cos\theta$

On choisit 1 seul, par exemple $z_1-z_2=2\cos\theta$ car l'autre $z_1-z_2=-2\cos\theta$ correspond à $z_2-z_1=2\cos\theta$.

Ainsi, finalement, on a :

$\begin{cases} z_1+z_2=2i\sin\theta\\ z_1-z_2=2\cos\theta\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} z_1=\cos\theta+i\sin\theta\\ z_2=-\cos\theta+i\sin\theta\end{array}$

$\boxed{\text{Les solutions de } z^2-2i\sin\theta\, z-1=0 \text{ sont } z_1=\cos\theta+i\sin\theta \text{ et } z_2=-\cos\theta+i\sin\theta}$

- Résolution de $z^2-e^{i\theta}z+\frac{i}{2}\sin2\theta=0$

On a : $\begin{cases} z_1+z_2=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta\\ z_1z_2=\frac{\sin2\theta}{2}i=\cos\theta\sin\theta\, i\end{cases}$

On voit donc rapidement :

$\boxed{z_1=\cos\theta \text{ et } z_2=i\sin\theta}$

Si on le voit pas, on peut procéder comme indiqué ci-dessus.

$(z_1-z_2)^2=(z_1+z_2)^2-4z_1z_2$

$= (e^{i\theta})^2-2i\sin2\theta$

$= e^{i2\theta}-2i\sin2\theta$

$= \cos2\theta+i\sin2\theta-2i\sin2\theta$

$= \cos2\theta-i\sin2\theta = e^{-2i\theta}$

$= (e^{-i\theta})^2$

D'où $\begin{cases} z_1+z_2=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta\\ z_1-z_2=e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta\end{cases}$

Donc $\boxed{z_1=\cos\theta \text{ et } z_2=i\sin\theta}$

Thème 3 : Racines n-ième

Exercice 9 : Calcul des racines complexes des équations : 8h55

1- $z^5=1$ ici ce sont les racines 5-ième de l'unité qu'on cherche !

Il faudra remarquer :

- la nécessité de passer par la forme trigonométrique
- comprendre pourquoi on aura 5 racines

2- $z^7=-i$ 3- $z^5=(1+i\sqrt{3})^4$ 4- $z^5=(1+i)^2$ 5- $z^7=\dfrac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2}$

Ici ce sont les racines n-ième d'un nombre complexe Z que l'on cherche !
On pourra remarquer qu'il suffit de déterminer

- toutes les racines n-ième de l'unité
- une racine n-ième triviale du complexe Z, (i.e celle déduite de la forme trigonométrique de Z)

pour déterminer toutes les racines n-ièmes du complexe Z.

!!!! Corrigé dans 30 min !!!!!

Exercice 11 Utilisation des racines : 9h25

A la question 4, on cherche A et B sachant leur somme A+B et leur produit A B
On poser une équation du second ordre pour les déterminer .
Ensuite il faudra dire laquelle des deux solutions de l'équation du second ordre est A et laquelle est B !!!

Indication: A et B seront conjugués il faudra alors analyser l'expression de A = zo + zo^2 + zo^4 pour indiqué quel peut-être le signe de sa partie imaginaire

TOURNEZ S' IL VOUS PLAIT ===>

3 | Racines n-ième

Exercice 9 : calcul des racines complexes des équations

- cas $z^5 = 1$

On passe en notation complexe : on cherche z sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho \in \mathbb{R}_+^*$

- Ici lors :

$$z^5 = 1 \iff (\rho e^{i\theta})^5 = 1 = e^{i0}$$

notation complexe de 1

$$\iff \rho^5 e^{i5\theta} = e^{i0}$$

$$\iff \begin{cases} \rho^5 = 1 \\ 5\theta = 0 + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{5}, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

- On énumère toutes les solutions ~~en~~ énumérant toutes les angles θ

On commence par $k=0$, puis $k=1$ on incrémente et s'arrête lorsque l'angle est congru modulo 2π à celui correspondant à $k=0$.

$\theta_0 = 0$, $\theta_1 = \frac{2\pi}{5}$, $\theta_2 = \frac{4\pi}{5}$, $\theta_3 = \frac{6\pi}{5}$, $\theta_4 = \frac{8\pi}{5}$

On s'arrête là car $\theta_5 = \frac{10\pi}{5} = 2\pi = \theta_0 \ (2\pi)$

Donc les solutions de $z^5 = 1$ sont dans $\left\{1, e^{i\frac{2\pi}{5}}, e^{i\frac{4\pi}{5}}, e^{i\frac{6\pi}{5}}, e^{i\frac{8\pi}{5}}\right\}$

On remarque il y a 5 solutions car on cherche la racine 5ième.

- cas $z^7 = -i$

On pose $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

On a l'équation :

$$\rho^7 e^{7\theta i} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

d'où $\rho = 1$ et $7\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

ie $\begin{cases} \theta = -\frac{\pi}{14} + \frac{2k\pi}{7}, \ k \in \mathbb{Z} \\ \rho = 1. \end{cases}$

D'où l'ensemble des solutions

$$\left\{ e^{i\left(-\frac{\pi}{14} + \frac{2k\pi}{7}\right)}, \ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \right\}$$

Faisons une remarque qui va nous être utile pour la suite :

une solution de $z^7 = -i$ est sous la forme :

$$z_k = e^{i\left(-\frac{\pi}{14} + \frac{2k\pi}{7}\right)} = e^{-i\frac{\pi}{14}} e^{i\frac{2k\pi}{7}} = e^{-i\frac{\pi}{14}} \omega_k$$

où
- $e^{-i\frac{\pi}{14}}$ est une (la) racine 7ième (triviale) de $-i \left(= e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)$
- ω_k est racine 7-ième de l'unité : $\omega_k = e^{i\frac{2\pi k}{7}}$

Ainsi, les racines n-ième d'un complexe $z = re^{i\phi}$ sont $z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} \omega_k$.

où ω_k parcourt les racines n-ièmes de l'unité ie $\omega_k = e^{\frac{i2\pi k}{n}}$

$k = 0, \dots, n-1$

- solution de $z^5 = (1+i\sqrt{3})^4$

On a : $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

d'où $(1+i\sqrt{3})^4 = 2^4 e^{i\frac{4\pi}{3}}$

racine 5-ième triviale est : $2^{\frac{4}{5}} e^{i\frac{4\pi}{15}}$

Les racines 5-ième de l'unité étant :

$\omega_k = e^{\frac{2i\pi k}{5}}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$,

(on a) Les solutions de $z^5 = (1+i\sqrt{3})^4$ sont

$$z_k = 2^{\frac{4}{5}} e^{i\frac{4\pi}{15}} e^{\frac{2i\pi k}{5}}, \ k = 0, 1, 2, 3, 4$$

• Cas $z^6 = (1+i)^2$

On a $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

D'où $(1+i)^2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

Les racines 6-ième de l'unité étant $\omega_k = e^{i\frac{2\pi k}{6}}$, $k=0,\dots,5$

Les solutions de $z^6 = (1+i)^2$ sont dans : $\left\{ 2^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\pi}{12}} e^{i\frac{2\pi k}{6}},\ k=0,1,2,3,4,5 \right\}$

• Cas $z^7 = \dfrac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2}$

on a : $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

D'où

$$\frac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2} = \frac{2^4 e^{i\frac{4\pi}{3}}}{(\sqrt{2})^2 e^{i\frac{\pi}{2}}} = 2^3 e^{i\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)} = 2^3 e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

et une racine 7-ième triviale de $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2}$ est $2^{\frac{3}{7}} e^{i\frac{5\pi}{42}}$

D'où les solutions de $z^7 = \dfrac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2}$ sont dans

$\left\{ 2^{\frac{3}{7}} e^{i\frac{5\pi}{42}} e^{i\frac{2\pi k}{7}},\ k=0,1,2,3,4,5,6 \right\}$

Exercice 11 Racines de l'unité

1. solutions complexes de $z^7 = 1$

$\left\{ e^{\frac{2i\pi k}{7}},\ k=0,1,2,3,4,5,6 \right\}$

$= \left\{ \omega_1^k,\ k=0,1,2,3,4,5,6,\ \omega_1 = e^{\frac{2i\pi}{7}} \right\}$

2. On pose $z_0 = e^{\frac{2i\pi}{7}}$

Rq. $1+z_0+z_0^2+z_0^3+z_0^4+z_0^5+z_0^6 = 0$

On sait (suite géométrique) que

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

d'où

$$1+z_0+z_0^2+z_0^3+z_0^4+z_0^5+z_0^6 = \frac{1-z_0^7}{1-z_0}$$

or $z_0^7 = e^{\frac{2i\pi}{7}\times 7} = e^{2i\pi} = 1$.

Donc $1-z_0^7 = 0$. D'où le résultat.

3. On pose $A = z_0+z_0^2+z_0^4$

$B = z_0^3+z_0^5+z_0^6$

Calculons $A+B$ et AB

$A+B = z_0+z_0^2+z_0^3+z_0^4+z_0^5+z_0^6$.

$\boxed{=-1}$ d'après la question précédente.

$AB = (z_0+z_0^2+z_0^4)(z_0^3+z_0^5+z_0^6)$

on va développer en remarquant que $z_0^7 = 1 \Rightarrow z_0^m = z_0^k$ si $m \equiv k\ (7)$

ie si $m = 7p+q$ alors $z_0^m = z_0^q$

$AB = z_0^4+z_0^6+1+z_0^5+1+z_0+1+z_0^2+z_0^3$

$\boxed{=2}$

4. Déduisons que A et B sont racines d'un polynôme du 2nd degré et valeurs de A et B.

On a vu que $\begin{cases} A+B = -1 \\ AB = 2 \end{cases}$

$A+B$ = somme des racines.

AB = produit des racines.

Donc A et B sont racines du polynôme $X^2-(A+B)X+AB$

ie A et B sont racines de $X^2+X+2=0$

or $X^2+X+2=0 \Leftrightarrow \left(X+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}+2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(X+\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{7}{4} = \left(i\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow X = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$

$Im(z_0+z_0^2+z_0^4) > 0$

D'où $\boxed{A = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}}$ $\boxed{B = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2}}$

Exercice 12 Utilisation des racines. **C'est à l'image de l'exercice précédent.**

Cette fois on parvient à exprimer $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ **avec des radicaux!**

!!!! Corrigé dans 30 min !!!!!

Exercice 12

1. Solutions complexes de $z^5 = 1$

Il est question de déterminer les racines 5-ième de l'unité.

On a les solutions

$$\boxed{z_k = e^{i\frac{2k\pi}{5}},\quad k = 0, 1, 2, 3, 4}$$

2. On note $z_0 = e^{\frac{2i\pi}{5}}$

Rq: $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$.

En effet,

$$1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = \frac{1 - z_0^5}{1 - z_0}$$

or $z_0^5 = e^{2i\pi} = 1$ ie $1 - z_0^5 = 0$.

D'où

$$1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0.$$

3. On pose $a = z_0 + z_0^4$ et $b = z_0^2 + z_0^3$

Montrons que $a + b = -1$ et $ab = -1$

En effet,

$$a + b = z_0 + z_0^4 + z_0^2 + z_0^3$$
$$= z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4$$
$$\boxed{= -1} \quad \text{car } 1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$$

De même

$$ab = (z_0 + z_0^4)(z_0^2 + z_0^3)$$
$$= z_0^3 + z_0^4 + z_0^6 + z_0^7$$
$$= z_0^3 + z_0^4 + z_0^5 z_0 + z_0^5 z_0^2$$
$$= z_0^3 + z_0^4 + z_0 + z_0^2$$
$$\boxed{= -1}$$ d'après le calcul précédent.

4. Déduisons que a et b sont solutions de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$

En effet, puisqu'on dispose de $a+b$ et de ab ie des somme et produit des racines, on peut déduire l'équation du 2^{nd} ordre dont elles sont solutions.

Ainsi, a et b sont solutions de

$$x^2 - (a+b)x + ab = 0.$$

ie $x^2 + x - 1 = 0$.

5. calcul des solutions de $x^2 + x - 1 = 0$

On a

$$x^2 + x + 1 = 0 \iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0$$
$$\iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = +\frac{5}{4}$$
$$\iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$

D'où

$$\boxed{x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

L'une de ces solutions est a et l'autre b.

6. Déduction d'une expression de $\cos\frac{2\pi}{5}$

Commençons par déterminer a et b

l'un a une partie réelle positive

l'autre négative.

$$a = z_0 + z_0^4 = e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}}$$
$$= e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\left(\pi + \frac{3\pi}{5}\right)}$$

Or $0 \leq \frac{2\pi}{5} < \frac{3\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\frac{2\pi}{5} \geq \cos\frac{3\pi}{5}$

D'où $\cos\frac{2\pi}{5} - \cos\frac{3\pi}{5} \geq 0$.

ie $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\left(\pi + \frac{3\pi}{5}\right) \geq 0$.

ie $\mathrm{Re}(a) = \mathrm{Re}(z_0 + z_0^4) \geq 0$.

Donc

$$\boxed{a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad b = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

De même;

$$a = z_0 + z_0^4 = e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}}$$
$$= e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right)}$$
$$= e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}}$$
$$= 2\cos\frac{2\pi}{5}$$

D'où

$$\boxed{\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}}$$

Thème 4 : Pour Aller plus loin *9h55*

Exercice 13 : **On se ramène à une équation du second ordre par un changement de variable. Z = z^3 Puis on détermine les racines cubiques des deux solutions obtenues :Je vous laisse le faire**

Exercice 14 : **Attention l'indication fournie (*existence de solution réelle semble erronée*) !!!!!!!!!**

Exercice 16: **Sommation et produits des racines n-ième de l'unité**

!!!! Indications et Corrigés dans 15 min !!!!!

04 | Pour aller plus loin

Exercice 13 : Solutions de $z^6+(2-i)z^3-8-8i=0$

Posons $Z=z^3$, on a

$Z^2+(2-i)Z-8-8i=0$.

· $\Delta=(2-i)^2-4(-8-8i)=35+28i$

On peut donc déterminer Z_1 et Z_2 puis on détermine (on résoud) $z^3=Z_1$ puis $z^3=Z_2$.

(Je vous laisse donc faire tout ça)

Exercice 14 :

Résolution de :

$4iz^3+2(1+i)z^2-(5+4i)z+3(1-7i)=0$

Information : elle possède une racine réelle.

· Cherchons la racine réelle :

$z=a\in\mathbb{R}$.

$4ia^3+(2+2i)a^2+(-5-4i)a+(3-21i)=0$

D'où $\begin{cases}2a^2-5a+3=0 & (1)\\ 4a^3+2a^2-4a-21=0 & (2)\end{cases}$

(1) $\Rightarrow$ $a=1$ ou $a=\frac{3}{2}$

$a=1$ dans (2) donne $4+2-4-21\neq0$

$a=\frac{3}{2}$ dans (2) donne $4\cdot\frac{27}{8}+2\frac{9}{4}-4\frac{3}{2}-21\neq0$

L'équation semble ne pas admettre de solution réelle !!!

L'indication fournie ne semble pas bonne !!!

Exercice 16

$n\in\mathbb{N}^*$

1. Calcul du produit des racines n-ième de l'unité.

Les racines n-ième de l'unité sont $\omega_k=e^{\frac{2i\pi k}{n}}$, $k=0,\dots,n-1$.

i.e. ω_1^k, $k=0,\dots,n-1$ avec $\omega_1=e^{\frac{2i\pi}{n}}$

D'où $\prod_{k=0}^{n-1}\omega_1^k=\omega_1^{\sum_{k=0}^{n-1}k}=\omega_1^{(1+2+\dots+n-1)}$

$=\omega_1^{\frac{n-1+0}{2}\cdot n}$

$=e^{\frac{2i\pi}{n}\cdot\frac{(n-1)n}{2}}$

$=e^{(n-1)\pi i}$

$=\cos(n-1)\pi$

$$\boxed{\prod_{k=0}^{n-1}\omega_1^k=(-1)^{n-1}}$$

2. On pose $\omega=e^{\frac{2i\pi}{n}}$, calculons $\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kp}$. Avec $p\in\mathbb{N}$

$\omega^{kp}=(\omega^p)^k=(\omega^\ell)^k$ si $p\equiv\ell\,[n]$ i.e. $p=nq+\ell$, $0\le\ell\le n-1$

Donc

· si $\ell=0$, on a $\omega^{kp}=1$ et $\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kp}=\sum_{k=0}^{n-1}1=n$

· si $\ell\neq0$ on a $\omega^\ell\neq1$ et $\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kp}=\sum_{k=0}^{n-1}(\omega^\ell)^k=\frac{1-\omega^{\ell n}}{1-\omega^\ell}$

$=\frac{1-e^{\frac{2i\pi\ell n}{n}}}{1-e^{2i\pi\ell}}$

$=0$

Donc : $$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kp}=\begin{cases}n & \text{si } p=nq,\ q\in\mathbb{N}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}$$

3. Déduisons que $\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n=2n$.

En effet, $(1+\omega^k)^n=\sum_{p=0}^{n}C_n^p(\omega^k)^p1^{n-p}$ seuls $p=0$, $p=n$ non nuls

D'où $\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{n}C_n^p\omega^{kp}=\sum_{p=0}^{n}C_n^p\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kp}$

$=C_n^0\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{k\cdot0}+C_n^n\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kn}$

$\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n=n+n=2n$