Université Paris-Sud | **Travaux pratiques**
L3 Mathématiques | **2012-2013**
M315 - Calcul Scientifique

Feuille de TP 1

Exercice 1. [Autour du triangle]

Rappel : Si `X` et `Y` sont deux vecteurs de même taille N, la commande `plot(X,Y)` trace la ligne brisée dont les N sommets sont les points de coordonnées $(\mathtt{X}_i, \mathtt{Y}_i)$, pour $i = 1, 2, \ldots, N$.

1. Tracez en trait plein noir le triangle dont les sommets sont $A = (0, -1)$, $B = (1, 0)$, $C = (0.3, 0.5)$. A l'aide de la commande `text`, ajoutez le nom des points sur la figure.
2. Déterminez les coordonnées des points A', B' et C', milieux des segments BC, CA et AB. Complétez la figure en traçant en pointillés rouges les médianes AA', BB' et CC'. Calculez les coordonnées du centre de gravité du triangle (intersection des trois médianes) et ajoutez-le avec une étoile sur la figure.

   N.B. : les commandes `hold on` et `hold off` pourront être utiles.
3. On appellera $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC. Déterminez les coordonnées du centre de $\mathcal{C}$. Vous pourrez pour cela écrire un système linéaire vérifié par ses coordonnées et le résoudre à l'aide de la commande `Matlab` $\backslash$. Calculez ensuite le rayon de $\mathcal{C}$. Complétez alors la figure en représentant le centre de $\mathcal{C}$ avec une étoile bleue et en traçant $\mathcal{C}$ en trait plein bleu.

   N.B. : on rappelle que `Matlab` n'est capable que de tracer des lignes brisées. Un cercle est donc approché par un polygone régulier avec un grand nombre de cotés.
4. Ajoutez enfin sur votre figure un titre contenant votre nom à l'aide de la commande `title`.

Exercice 2. [Développement de Taylor]

On rappelle le développement de Taylor de la fonction exponentielle autour d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$e^x = e^{x_0} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0), \quad \text{avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

On souhaite étudier l'écart entre la fonction exponentielle et son polynôme de Taylor.

1. Soit P_n le polynôme de degré n, $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Créez une fonction `y=P(x,n)` qui calcule $\mathtt{y} = P_{\mathtt{n}}(\mathtt{x})$. Prenez soin de construire une fonction vectorielle, c'est-à-dire que `x` pourra être un scalaire ou un vecteur de taille k et, dans ce dernier cas, `y` sera aussi un vecteur de taille k tel que $\mathtt{y}_i = P_{\mathtt{n}}(\mathtt{x}_i)$, pour $1 \leq i \leq k$.
2. Tracez avec des couleurs différentes la fonction exponentielle et son polynôme de Taylor au point $x_0 = 0$, pour différents valeurs de n, sur l'intervalle $[0, 1]$. Ajoutez à votre figure une légende à l'aide de la commande `legend` et un titre à l'aide de la commande `title`.
3. Dans une seconde fenêtre graphique, tracer la différence entre la fonction exponentielle et son polynôme de Taylor (pour différentes valeurs de n), en échelle logarithmique. Ajouter une légende et calculer la pente des différentes droites obtenues. Vous pourrez les afficher à l'aide de la commande `fprintf`.

Exercice 3. [Résolution de $f(x) = x$]

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0.8 - 0.8x^2 + 0.1x^3$. L'intervalle $[0, 1]$ est stable par f, c'est-à-dire que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$, et contient un unique point fixe de f, c'est-à-dire une unique solution de l'équation $f(x) = x$.

1. Tracez dans une fenêtre graphique le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[0, 1]$ ainsi que la première bissectrice, c'est-à-dire la droite qui passe par les points $(0, 0)$ et $(1, 1)$. Vérifiez graphiquement qu'il y a effectivement une unique solution de $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0, 1]$.
2. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Ajoutez sur la figure la ligne brisée joignant les points $(u_0, 0)$, (u_0, u_1), (u_1, u_1), (u_1, u_2), (u_2, u_2), ... , (u_8, u_9), (u_9, u_9). Ajoutez un titre au graphique. Vérifiez graphiquement que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, tandis que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et qu'elles convergent toutes les deux vers la solution de $f(x) = x$.
3. Déterminer un intervalle de longueur inférieure ou égale à 10^{-5} qui contient le point fixe de f.