Feuille de TP `Matlab` n° 2

Exercice 1 : Moyenne arithmético-géométrique

Etant donné des réels u_0 et v_0 tels que $0 < v_0 < u_0$, on considère les suites (u_n) et (v_n) définies par les relations

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n\, v_n}, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Question 1 –
Préliminaire théorique. Si les réels u, v vérifient $0 < v < u$, alors on a $v < \sqrt{uv} < \frac{1}{2}(u+v) < u$. Il s'ensuit que $v_n < v_{n+1} < u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On fixe $u_0 = 1$ dans tout ce qui suit. La limite commune des suites (u_n) et (v_n) ne dépend que du paramètre v_0 : on la notera $L(v_0)$.

Question 2 –
On prend d'abord $v_0 = \frac{3}{10}$. Calculer u_n, v_n pour $n = 1, 2, \ldots, 10$ et afficher ces valeurs côte à côte sur deux colonnes avec 14 décimales et dans une troisième colonne, afficher $u_n - v_n$ en format scientifique avec 4 chiffres décimaux.
Recommencer avec $v_0 = \frac{1}{10}$ et $v_0 = \frac{3}{100}$.
Les propriétés mathématiques des suites (u_n) et (v_n) évoquées au 1) sont-elles bien vérifiées par les résultats obtenus ?

Question 3 –
On reprend $v_0 = \frac{1}{10}$. Calculer et stocker les itérés u_n, v_n jusqu'au premier entier n tel que l'on ait $|u_n - v_n| < 10^{-14}$. Soit m cet entier et soit $L = \frac{1}{2}(u_m + v_m)$. Afficher m et L. Dans la suite, on considèrera que $L = L(v_0)$ (à la précision machine près).

Afficher ensuite les valeurs de $\dfrac{|u_n - L|}{|u_{n-1} - L|}$, $\dfrac{|u_n - L|}{|u_{n-1} - L|^2}$, $\dfrac{|v_n - L|}{|v_{n-1} - L|}$ et $\dfrac{|v_n - L|}{|v_{n-1} - L|^2}$ pour $n = 1, \ldots, m$.
Recommencer avec $v_0 = \frac{3}{100}$.
Quel semble être l'ordre de convergence des suites (u_n) et (v_n) ?

Question 4 –
Ecrire un programme sous forme de fonction Matlab `limite(v0)` qui reçoit comme unique argument un réel v_0 de $]0, 1[$ et calcule $L(v_0)$ (plus exactement son approximation $\frac{1}{2}(u_m + v_m)$ définie comme en 3)).

Question 5 –
Tracer le graphe de la fonction $L : v_0 \mapsto L(v_0)$ sur $]0, 1[$.

Question 6 –
En vue d'utilisations de la méthode de dichotomie, écrire un programme sous forme d'une fonction Matlab `[x,C,fC]=dicho(f,a,b,epsilon)` telle que
– les arguments d'appel `a`, `b` et `epsilon` (> 0) sont des nombres et `f` désigne une fonction : selon que cette fonction a été définie à l'aide d'une commande `mafonction = inline(' ... ')` ou dans un fichier Matlab `mafonction.m`, la forme de l'argument d'appel est `mafonction` ou `@mafonction`
– les arguments de sortie sont un nombre `x` et deux vecteurs `C` et `fC` dont la nature est précisée ci-dessous.

Pour que l'appel soit valide, il faut que l'on ait `f(a)f(b)` < 0. Dans le cas contraire, la fonction `dicho` devra émettre un message d'erreur. Rappelons que la méthode de dichotomie consiste à construire, à partir de $a_0 =$ `a` et $b_0 =$ `b`, une suite d'intervalles emboîtés $[a_n, b_n]$ qui contiennent un zéro de `f` et vérifient $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$.
Dans le vecteur `C` on stockera les milieux c_n des intervalles $[a_n, b_n]$ pour $n = 0, 1, \ldots, m$ où m est le premier entier tel que $|b_n - a_n| \leqslant 2$ `epsilon`. Dans le vecteur `fC` on stockera les valeurs `f`(c_n) pour

$n = 0, 1, \ldots, m$ et on prendra `x`$= c_m$ (qui, par construction, est une valeur approchée à `epsilon` près d'un zéro de `f`).

Question 7 –
Utiliser la fonction `dicho` pour déterminer à 10^{-8} près le réel v_0 tel que $L(v_0) = \frac{3}{4}$.