Université Paris-Sud **Travaux pratiques**
L3 Mathématiques **2013-2014**
M315 - Calcul Scientifique

Feuille de TP 3

Exercice 1. [Méthode de Newton et méthode de dichotomie]

On considère la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^5 - 2x^3 + 1.2x + 0.05$. Elle possède un unique zéro sur $\mathbb{R}$. On souhaite en préciser la valeur numérique.

1. Vérifier sur un graphique que la fonction g admet bien un unique zéro. En dressant le tableau de variation de g on constatera qu'il suffit de représenter g sur l'intervalle $[-3/2, 3/2]$, par exemple.

On s'intéresse à la méthode de Newton pour trouver un zéro c d'une fonction continue f. Cette méthode consiste à définir la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \;\; n \geq 0,$$

tant que $f'(x_n)$ ne s'annule pas. Si x_0 est choisi suffisamment proche de c, la suite x_n converge vers c.

2. Écrire une fonction Matlab `[X,N]=newton(f,df,x0,prec,Nmax)` qui calcule une solution approchée `X` de $\mathtt{f}(x) = 0$ par la méthode de Newton. Les arguments d'entrée de la fonction `newton` sont la fonction `f`, sa dérivée `df`, le point `x0` d'initialisation de la suite (x_n), la précision voulue `prec` et le nombre maximal d'itérations autorisées de l'algorithme `Nmax`. En sortie, `X`$= x_{\mathtt{N}}$ est la valeur approchée de la solution obtenue à la fin de `N` itérations de l'algorithme. On arrêtera l'algorithme si $|f(x_{\mathtt{N}})| \leq$ `prec` ou si `N` = `Nmax`. Dans cette fonction, <u>on ne stockera pas</u> les itérées de la suite x_n, on ne gardera que la dernière valeur $x_{\mathtt{N}}$ calculée.
3. Écrire une deuxième fonction `[vecX,N]=newton_liste(f,df,x0,prec,Nmax)`, qui cette fois-ci retourne en sortie un vecteur `vecX` contenant les valeurs $x_0,\ x_1, \ldots,\ x_{\mathtt{N}}$ de la suite $(x_n)_n$ qui ont été calculées.

Dans la suite on cherchera à calculer une solution approchée `C` de la solution de $g(x) = 0$ vérifiant $|g(\mathtt{C})| \leq 10^{-15}$ et on fixera `Nmax`=100.

3. Appliquer la méthode de Newton à la fonction g en prenant pour point de départ $x_0 = 1.5$. Qu'observe-t-on ? La méthode semble-t-elle converger, si l'on considère cette valeur de x_0 ?
4. La convergence de la méthode de Newton étant locale, on va chercher à, avant l'utiliser, s'approcher de la solution, ayant comme but de prendre x_0 suffisamment proche du zéro de g. Pour ce faire, appliquer la méthode de dichotomie à partir de l'intervalle $[-1, 1.5]$ pour obtenir un intervalle de longueur inférieure à 0.5 qui contient le zéro de g. Appliquer ensuite la méthode de Newton, en prenant comme x_0 la valeur approchée du zéro de g donnée par la méthode de dichotomie avec cette précision. Afficher en utilisant la commande `fprintf` les valeurs de la suite $g(x_n)$ jusqu'à la convergence, c'est-à-dire jusqu'à ce que $|g(x_n)| \leq 10^{-15}$.
5. Comparer le nombre d'itérations nécessaires de la méthode de dichotomie et de la méthode de Newton pour obtenir une approximation du zéro de g, avec une précision donnée (par exemple 10^{-15}). Pour ce faire, modifier la fonction `dicho` programmée au TP précédent pour que le critère d'arrêt des deux algorithmes soit le même et prenez comme intervalle de départ $[a, b] = [x_0 - 0.25, x_0 + 0.25]$, où x_0 est la valeur avec laquelle la méthode de Newton a été initialisée à la question précédente. Quelles sont les avantages de chacune des méthodes par rapport à l'autre ?

Exercice 2. [La méthode de Newton en $\mathbb{R}^2$]
L'objectif de cet exercice est de calculer les points d'intersection de deux courbes en utilisant la méthode de Newton.

Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction de classe C^2. Supposons que F admet un unique zéro $\bar{X} = (\bar{x}, \bar{y})$ dans D. La **méthode de Newton** pour approcher le zéro de F consiste à choisir $X_0 = (x_0, y_0) \in D$ et à définir (tant que c'est possible) la suite $(X_n = (x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$X_{n+1} = X_n - \big(DF(X_n)\big)^{-1} F(X_n), \;\; n \geq 0,$$

où

$$DF(X_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(X_n) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(X_n) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(X_n) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(X_n) \end{bmatrix}$$

est la matrice jacobienne de F au point X_n. On montre que, si $DF(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$ et si X_0 est choisi suffisamment proche de $\bar{X}$, alors la suite X_n est bien définie et converge vers $\bar{X}$.

1. Considérons la courbe $\mathcal{C}_1$ d'équation

   $$x^3 + y^3 = 3xy$$

   Cette courbe peut se paramétrer à l'aide du paramètre $t = \frac{y}{x}$ par les équations

   $$\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3}, \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3}. \end{cases}$$

   En considérant d'abord t dans l'intervalle $[-0.5, 100]$, puis dans $[-100, -1.5]$, représenter graphiquement la courbe $\mathcal{C}_1$.
2. Considérons maintenant la courbe $\mathcal{C}_2$ d'équation $y = \cos(x)$. Représenter cette courbe dans la même figure que la courbe $\mathcal{C}_1$.

Les deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ s'intersectent en 3 points du plan. On se propose de calculer ces points par la méthode de Newton. Ce problème d'intersection des deux courbes s'écrit sous la forme $F(x, y) = (0, 0)$, où $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est la fonction $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) := (x^3 + y^3 - 3xy, y - \cos(x))$.

3. Définir dans des fonctions Matlab de la forme `Y=F(X)` et `M=DF(X)` la fonction F ainsi que sa matrice jacobienne DF. L'argument de `F` et de `DF` est un vecteur colonne `X` de taille 2 dont les composantes sont les coordonnés x et y d'un point $X \in \mathbb{R}^2$. La fonction `F` doit retourner un vecteur colonne `Y` de taille 2 dont les composantes sont $(F_1(X), F_2(X))$; la fonction `DF` doit retourner une matrice `M` de taille 2×2 dont les composantes sont les dérivés partielles de F_1 et de F_2 en `X`.
4. Adapter la fonction `newton` que vous avez programmé à l'exercice 1 au cas bidimensionnel (définir une nouvelle fonction `[X,N]=newton2d(F,DF,X0,prec,Nmax)`) et l'utiliser pour obtenir des valeurs approchées des 3 points d'intersection des deux courbes, avec une précision de 10^{-8}. Pour ce faire, on pourra utiliser les points $(-1.1, 0)$, $(0.3, 1)$ et $(1.1, 0)$ pour initialiser l'algorithme. Représenter dans le même graphique que pour les questions 1 et 2 les 3 points obtenus par la méthode de Newton avec 3 symboles différents chacun.
5. Afficher les valeurs approchés des coordonnées des trois points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, obtenues par la méthode de Newton.