Examen de seconde session
Mardi 19 juin 2012 - Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Chacun des exercices porte sur la résolution numérique de l'équation différentielle

$$(ED) \qquad x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in]t_0, t_0 + T[, \qquad x(t_0) = x^0.$$

Où $f \in \mathcal{C}_{lip} \cap C^p([t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, (les entiers p et d, ainsi que les réels t_0 et T seront précisés dans chaque exercice). Lorsque T est infini, on se donne un réel $h > 0$. Si T est fini, on fixe un entier N et on définit $h = T/N$. On pose ensuite $t_n = t_0 + nh$ $(0 \le n \le N)$ et on désigne par x_n une valeur approchée de $x(t_n)$ pour tout $n \in \{0, \ldots N\}$. On désignera par L la constante de Lipschitz de f en espace.

Exercice- 1 *Questions de cours*

Dans cet exercice on suppose $T < \infty$, t_0 et d quelconques, et $p = 3$.
On considère les deux schémas numériques, à un pas, suivants

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n), \; n = 0, \ldots N-1 \\ x_0 = x^0. \end{cases}, \quad (\mathcal{S}_2) \begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1}), \; n = 0, \ldots N-1 \\ x_0 = x^0. \end{cases}$$

Q-1 : Préciser le caractère explicite ou implicite de ces schémas, et expliquer brièvement la démarche de leur construction.

Q-2 : Pour chacun de ces schémas, étudier sa consistance, sa stabilité et sa convergence.

Q-3 : Donner les grandes lignes d'un script `Matlab` permettant de programmer ces deux schémas. (**On admettra que f est donnée dans un fichier f.m, par une fonction** *matlab* :**`function y=f(t,x)`**).

Q-4 : Connaissez-vous un schéma à un pas explicite d'ordre 2 ? Implicite d'ordre 2 ? Si oui, pouvez-vous décrire la démarche de sa construction ? (**Il n'est pas demandé de démontrer l'ordre 2 de ces schémas**).

Exercice- 2 *Questions de cours*

Dans cet exercice on suppose $t_0 = 0$, $T < \infty$, $p = 4$ et $d = 1$.

On considère le schéma suivant

$$\begin{cases} x_{n+3} + \alpha(x_{n+2} - x_{n+1}) - x_n = h\beta\left(f_{n+2} + f_{n+1}\right), \quad n = 0, \ldots, N-3, \\ x_0, x_1, x_2 \quad \text{donnés.} \end{cases} \tag{1}$$

où $f_n = f(t_n, x_n)$ pour tout $n = 0, \ldots, N$ et α, β sont des nombres réels.

Q-1 : Déterminer les constantes α et β pour que ce schéma soit de degré le plus élevé.

Q-2 : La méthode obtenue est-elle 0-stable ?

Exercice- 3 *Un schémas conservant l'énergie*

On suppose $d = 2, t_0 = 0$, $T < \infty$ et $x(t) = (y(t), z(t))$, et que le système (ED) est ici défini par

$$(EDS) \begin{cases} y'(t) = -z(t)^2, \\ z'(t) = y(t)z(t), \\ y(0) = 0, \\ z(0) = 1. \end{cases} \tag{2}$$

Q-1 : Montrer que ce problème a la propriété suivante :

$$\forall t \in [0, T], \quad x(t)^2 + y(t)^2 = C, \tag{3}$$

où C est une constante à déterminée.

Q-2 : Ecrire les schémas d'Euler explicite et implicite pour ce problème. Conservent-ils la propriété (3) ?

Q-3 : On considère le schéma suivant

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n - hz_n \dfrac{z_n + z_{n+1}}{2}, \quad n = 0, \ldots, N-1, \\ z_{n+1} = z_n + hz_n \dfrac{y_n + y_{n+1}}{2}, \\ y_0 = 0, z_0 = 1. \end{cases} \tag{4}$$

Q-3-1 : La propriété précédente (3) est-elle conservée ?

Q-3-2 : Mettre le schéma (4) sous la forme

$$A(z_n; h) \begin{pmatrix} y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = {}^tA(z_n; h) \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix},$$

où $A(z_n; h)$ est une matrice 2×2 et ${}^tA(z_n; h)$ sa transposée. Puis écrire le schéma sous forme explicite.

Q-4 : En utilisant la relation entre y_n et z_n, écrire le schéma sous la forme d'un schéma à un pas en y.

Q-5 : Quel est l'ordre du schéma obtenu ?

Exercice- 4 *Analyse d'un schéma de Runge Kutta*

Dans cet exercice on suppose $T < \infty$, t_0 quelconque, et $p = 3,\ d = 1$.

Q-1 : Trouver les coefficients $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que la formule

$$\int_0^1 P(s)\, ds = aP(0) + bP(\frac{2}{3}) \quad \text{soit exacte pour les polynômes de degré} \leq 1 \quad .$$

Cette formule reste-t-elle exacte pour les polynômes de degré 2 ?

Q-2 : En déduire que pour tout $\varphi \in C^3([t_0, t_0 + T]; \mathbb{R})$, il existe une constante $C_0 > 0$ telle que

$$\forall h \in [0, T], \forall t \in [t_0, t_0 + T - h], \quad \left| \int_t^{t+h} \varphi(s)\, ds - h\left(a\varphi(t) + b\varphi(t + \frac{2h}{3})\right) \right| \leq Ch^4.$$

Q-3 : On se donne le schéma numérique suivant, défini par $x_0 = x^0$ et

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h\left(\frac{1}{4}p_{n,1} + \frac{3}{8}p_{n,2} + \frac{3}{8}p_{n,3}\right), \quad n \in \{0, \dots N-1\}, \\ p_{n,1} = f(t_n, x_n), \\ p_{n,2} = f(t_n + \frac{2h}{3}, x_n + \frac{2h}{3}p_{n,1}), \\ p_{n,3} = f(t_n + \frac{2h}{3}, x_n + \frac{2h}{3}p_{n,2}). \end{cases} \tag{5}$$

Q-3-1 : Donner le tableau des coefficients de ce schéma de Runge-Kutta.
Quelle est la formule d'intégration principale associée ?

Q-3-2 : Étudier la stabilité de ce schéma. Puis donner un majorant de la constante de stabilité.

Q-3-3 : On pose

$$\xi_{23}(t,h) = 2f\left(t + \frac{2}{3}h, x(t + \frac{2}{3}h)\right) - g(t, x(t), h)$$

avec $g(t,y,h) = f\left(t + \frac{2}{3}h, y + \frac{2h}{3}f(t,y)\right) + f\left(t + \frac{2}{3}h, y + \frac{2h}{3}f(t + \frac{2h}{3}, y + \frac{2h}{3}f(t,y))\right)$.

Montrer qu'il existe une constante $C_{23} > 0$ indépendante de h telle que

$$|\xi_{23}(t,h)| \leq C_{23}h^3, \quad \forall h \in [0,T], \forall t \in [t_0, t_0 + T - h]$$

Q-3-4 : Montrer que le schéma est consistant d'ordre exactement 3.

Q-3-5 : En déduire que le schéma est convergent d'ordre 3. et préciser les constantes K_0 et K telles que

$$\max_{0 \leq n \leq N} |x(t_n) - x_n| \leq K_0|x^0 - x_0| + Kh^2.$$

Q-4 : On souhaite appliquer le schéma précédent avec un pas $h = \frac{1}{50}$ pour résoudre le problème

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t), \quad t \in]0,1[\\ x(0) = \theta(0). \end{cases} \tag{6}$$

où θ n'est connue que par certaines de ses valeurs données dans le tableau suivant :

t	-5e-2	-3e-2	-1e-2	1e-2	3e-2	5e-2
θ	-0.01	-0.1	0.1	-0.1	0.01	0.1

On suppose que l'on dispose d'une fonction `Matlab` d'interpolation de Lagrange :

```
function [y0] = interpoleLagrange(x,y,x0)
 % ENTREE:
 %    x est un tableau des points
 %    y est le tableau des valeurs aux points x de la fonction à interpoler.
 %    x0 est le point ou l'on cherche la valeur y0, du polynome d'interpolation de Lagrange.
 % SORTIE:
 %   y0 = P(x0), où P est le polynome satisfaisant P(x(i)) = y(i),i=1..,length(x)
```

qui à tout vecteur de points x et tout vecteur de valeurs y, retourne la valeur au point x_0 du polynôme de Lagrange construit à l'aide de x, y.

Le coût en temps de calcul de cette fonction étant proportionnel à la taille des vecteurs x, y, préciser les points à rentrer à cette fonction pour approcher $\theta(0)$ avec un moindre coût, mais de manière suffisamment précise pour l'utilisation du schéma (5).

Exercice- 5 *Paramètre de tolérance locale dans l'adaptation de pas.*

Dans un algorithme d'adaptation de pas, il est question de choisir le le pas de temps de tel sorte que l'erreur à l'instant final soit majorée en erreur absolue par une certaine valeur ε appelé tolérance : c'est-à-dire

$$\|x(t_N) - x_N\| \leq \varepsilon. \tag{7}$$

Mais dans la pratique on ne sait agir que sur l'erreur locale et plus particulièrement sur l'erreur locale de consistance à chaque instant. On souhaite dans cet exercice estimer un majorant ε_T de cet erreur locale de consistance pour garantir la majoration (7).

Partie I : Préliminaires

Soit $\phi, \psi \in C([a,b];\mathbb{R}^+)$, et $K \in \mathbb{R}^+$, telles que,

$$\phi(t) \leq K + \int_a^t \psi(s)\phi(s)\,ds \quad \forall a \leq t \leq b.$$

Q-1 : On pose $g(t) = \frac{K+\int_a^t \psi(s)\phi(s)\,ds}{K\exp\left(\int_a^t \psi(s)\,ds\right)}, \quad \forall a \leq t \leq b.$

Q-1-1 : Calculer $g(a)$.

Q-1-2 : Montrer que g est une fonction décroissante sur $[a,b]$.

Q-2 : En déduire que

$$\phi(t) \leq K\exp\left(\int_a^t \psi(s)\,ds\right) \quad \forall a \leq t \leq b.$$

Q-3 : Pour x_0 et $\tilde{x}_0$ donnés, on désigne par $y(t)$, respectivement $\tilde{y}(t)$ les solutions de (ED) avec pour donnée initiale respective $y(t_0) = x_0$ et $\tilde{y}(t_0) = \tilde{x}_0$.

Q-3-1 : Montrer que

$$\|\tilde{y}(t) - y(t)\| \leq \|\tilde{x}_0 - x_0\| + L\int_{t_0}^t \|\tilde{y}(s) - y(s)\|\,ds \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T.$$

Q-3-2 : En déduire que

$$\|\tilde{y}(t) - y(t)\| \leq \|\tilde{x}_0 - x_0\| e^{L(t-t_0)}, \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T.$$

Partie II :

On considère le schéma d'Euler explicite suivant à pas variable

$$(S)\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h_n f(t_n, x_n), \quad n \in \{0, \ldots N-1\} \\ x_0 = x^0 \end{cases} \tag{8}$$

Q-4 : Donner l'expression ξ_n de l'erreur de consistance à l'instant t_n de ce schéma.

Q-5 : On rappelle que la fonction principale d'erreur au point y à l'instant est la fonction $\tau(t,y)$ telle que $x(t+h) - y =$ Montrer que la fonction principale d'erreur est donnée par :

$$\tau(t,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right)(t,y)$$

$\boxed{\textbf{Q-6} \quad :}$ pour tout $n \in \{0, \ldots, N\}$, on définit la suite des fonctions ψ_n par :

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} \psi_n'(t) = f(t, \psi_n(t)), \quad t \in]t_n, t_0 + T[, \\ \psi_n(t_0) = x_n. \end{array} \right. \tag{9}$$

Q-6-1 : Comparer $\psi_0(t_N)$ à $x(t_N)$.

Q-6-2 : Montrer que

$$\psi_n(t_{n+1}) = x_{n+1} + \xi_n.$$

Q-6-3 : Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} \Big(\psi_{n+1}(t_N) - \psi_n(t_N)\Big) = x_N - x(t_N)$.

Q-6-4 : Montrer que $\forall n \in \{0, \ldots, N-1\}$, on a

$$\|\psi_{n+1}(t) - \psi_n(t)\| \leq h_n e^{L(t-t_{n+1})} \|h_n \tau(t_n, x_n)\| \quad \forall t_{n+1} \leq t \leq t_N.$$

Q-6-5 : En déduire que $\displaystyle\|x(t_N) - x_N\| \leq \sum_{n=0}^{N-1} \Big(h_n e^{L(t_N - t_{n+1})} \|h_n \tau(t_n, x_n)\|\Big)$

Q-6-6 : Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} \Big(h_n e^{L(t_N - t_{n+1})}\Big) \leq \int_{t_0}^{t_N} e^{L(t_N - s)}\, ds$

$\boxed{\textbf{Q-7} \quad :}$ On suppose que $\forall n \in \{0, \ldots, N-1\}$, on a $\|h_n \tau(t_n, x_n)\| \leq \varepsilon_T$.

Q-7-1 : Montrer que

$$\|x(t_N) - x_N\| \leq \frac{\varepsilon_T}{L}\Big(e^{LT} - 1\Big).$$

Q-7-2 : En déduire une tolérance ε_T à l'erreur locale de consistance pour assurer une tolérance ε à l'erreur globale.