

Feuille de TD n° 2 Schémas de Runge-Kutta

Dans cette fiche on considère les schémas de Runge-Kutta pour la résolution numérique de l'équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [t_0, t_0 + T], \quad x(t_0) = x_0. \quad (1)$$

Où $f \in C^r([t_0, t_0 + T]; \mathbb{R})$, (r entier, ainsi que les réels t_0 et T seront précisés dans chaque exercice). On se donne alors un entier N fixé, et on pose $h = T/N$ et $t_n = t_0 + nh$ ($0 \leq n \leq N$). On désigne par x_n une valeur approchée de $x(t_n)$ pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$.

Partie - 1 Schémas de Runge-Kutta : Application du cours

Exercice- 1 Généralisation du résultat du cours

Soit $\sigma_1, \dots, \sigma_q$ des points 2 à 2 distincts de $[0, 1]$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_q \in \mathbb{R}$, des points tels que

$$\int_0^1 Q(s) ds = \sum_{i=1}^q \lambda_i Q(\sigma_i) \quad \forall Q \in \mathbb{R}[X], \quad \deg(Q) \leq m, \text{ avec } m \geq q - 1.$$

Montrer que $\forall \varphi \in C^{m+1}([t_0, t_0 + T]; \mathbb{R}), \exists C \geq 0$ tel que : $\forall h \in [0, T], \forall t \in [t_0, t_0 + T - h]$,

$$\left| \int_t^{t+h} \varphi(s) ds - h \sum_{i=1}^q \lambda_i \varphi(t + \sigma_i h) \right| \leq Ch^{m+2}, \quad \text{avec } C = \frac{\max_{s \in [t_0, t_0 + T]} |\varphi^{(m+1)}(s)|}{(m+1)!}.$$

[On pourra, si possible, compléter les noeuds $\sigma_1, \dots, \sigma_q$ avec $\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_{m+1}$, et utiliser le résultat sur l'interpolation polynomiale de Lagrange.] **Remarque : ce résultat nous dit que toute formule d'intégration approchée (peu importe le nombre de points !) dans l'intervalle $I \in \mathbb{R}$, exacte pour les polynômes de degré m fournit une approximation en $\mathcal{O}(|I|^{m+2})$ de l'intégrale de toute fonction de classe C^{m+1} .**

Exercice- 2 Application à la méthode RK4

Q-1 : Quel est le degré maximum des polynômes pour lesquels la formule de Simpson

$$\int_0^1 g(s) ds \simeq \frac{1}{6}g(0) + \frac{4}{6}g\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}g(1)$$
 est exacte ?

Q-2 : Préciser l'entier p maximal pour lequel on peut affirmer que si $\varphi \in \mathcal{C}([t_0, t_0 + T]; \mathbb{R})$ suffisamment régulière il existe une constante $C \geq 0$ telle que : $\forall h \in [0, T], \forall t \in [t_0, t_0 + T - h]$,

$$\left| \int_t^{t+h} \varphi(s) ds - \frac{h}{6} \left(\varphi(t) + 4\varphi\left(t + \frac{h}{2}\right) + \varphi(t+h) \right) \right| \leq Ch^p.$$

On n'oubliera pas de préciser la régularité de φ .

Q-3 : Ecrire le schéma RK4. Que peut-on déduire des résultats précédents sur l'ordre du schéma RK4 ?

Partie - 2 Schémas de Runge-Kutta : Etude de quelques schémas explicites

Exercice- 1

On considère le problème différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [0, T] \\ x(0) = x^0. \end{cases} \quad (2)$$

où $x^0 \in \mathbb{R}$ est donné et $f \in \mathcal{C}_{lip}([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ suffisamment régulière.

Q-1 : On considère la formule d'intégration approchée suivante

$$\int_0^1 g(s) ds \simeq \frac{1}{8} \left(g(0) + 3g\left(\frac{1}{3}\right) + 3g\left(\frac{2}{3}\right) + g(1) \right).$$

Q-1-1 : Montrer qu'elle est exacte pour les polynômes de degré 3.

Q-1-2 : En déduire que si $\varphi \in \mathcal{C}^4([0, T]; \mathbb{R})$ il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\forall h \in [0, T[, \forall t \in [0, T - h], \left| \int_t^{t+h} \varphi(s) ds - \frac{h}{8} \left[\varphi(t) + 3\varphi\left(t + \frac{h}{3}\right) + 3\varphi\left(t + \frac{2h}{3}\right) + \varphi(t+h) \right] \right| \leq Ch^5.$$

Q-2 : On se donne le schéma numérique suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} h = \frac{T}{N}, t_n = nh \quad n \in \{0, \dots, N\}, x_0 \in \mathbb{R} \text{ donné,} \\ x_{n+1} = x_n + \frac{h}{8} (p_{n,1} + 3p_{n,2} + 3p_{n,3} + p_{n,4}), \quad n \in \{0, \dots, N-1\}, \\ p_{n,1} = f(t_n, x_n), \\ p_{n,2} = f\left(t_n + \frac{h}{3}, x_n + \frac{h}{3}p_{n,1}\right), \\ p_{n,3} = f\left(t_n + \frac{2h}{3}, x_n - \frac{h}{3}p_{n,1} + hp_{n,2}\right), \\ p_{n,4} = f\left(t_n + h, x_n + h(p_{n,1} - p_{n,2} + p_{n,3})\right). \end{array} \right.$$

Q-2-1 : Quelle est la formule d'intégration principale associée ?

Q-2-2 : Justifier, sans faire de calcul, que ce schéma ne peut pas être d'ordre supérieur à 4.

Q-2-3 : Étudier la stabilité de ce schéma.

Q-2-4 : Ce schéma est-il consistant ? est-il convergent ?

(Attention ! Il n'est pas demandé de déterminer l'ordre de consistance ni de convergence).

Exercice- 2

On considère le problème différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [0, T] \\ x(0) = x^0. \end{cases} \quad (3)$$

où $x^0 \in \mathbb{R}$ est donné et $f \in \mathcal{C}_{lip}([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^3([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Q-1 : Une nouvelle formule d'intégration numérique.

Q-1-1 : Trouver les coefficients $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que la formule

$$\int_0^1 g(s) ds \simeq a g(0) + b g\left(\frac{2}{3}\right) \text{ soit exacte pour les polynômes de degré } \leq 1.$$

Cette formule reste-t-elle exacte pour les polynômes de degré 2 ?

Q-1-2 : En déduire que si $\varphi \in \mathcal{C}^3([0, T]; \mathbb{R})$ alors il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\forall h \in [0, T], \forall t \in [0, T - h], \left| \int_t^{t+h} \varphi(s) ds - h \left(a \varphi(t) + b \varphi\left(t + \frac{2h}{3}\right) \right) \right| \leq Ch^4.$$

Q-2 : On se donne le schéma numérique défini par :

$$\begin{cases} h = \frac{T}{N}, t_n = nh \quad n \in \{0, \dots, N\}, x_0 \in \mathbb{R} \text{ donné,} \\ x_{n+1} = x_n + h \left(\frac{1}{4} p_{n,1} + \frac{3}{4} p_{n,2} \right), \quad n \in \{0, \dots, N-1\}, \\ p_{n,1} = f(t_n, x_n), \\ p_{n,2} = f\left(t_n + \frac{2h}{3}, x_n + \frac{2h}{3} p_{n,1}\right). \end{cases}$$

Q-2-1 : Quelle est la formule d'intégration principale associée ?

Q-2-2 : Étudier la stabilité de ce schéma.

Q-2-3 : Montrer que ce schéma est exactement d'ordre 2.

Q-2-4 : Ce schéma est-il convergent ?

Q-3 : On se donne le schéma numérique défini par $x_0 = x^0$ et

$$\begin{cases} h = \frac{T}{N}, t_n = nh \quad n \in \{0, \dots, N\}, x_0 \in \mathbb{R} \text{ donné,} \\ x_{n+1} = x_n + h \left(\frac{1}{4} p_{n,1} + \frac{3}{4} p_{n,3} \right), \quad n \in \{0, \dots, N-1\}, \\ p_{n,1} = f(t_n, x_n), \\ p_{n,2} = f\left(t_n + \frac{h}{3}, x_n + \frac{h}{3} p_{n,1}\right), \\ p_{n,3} = f\left(t_n + \frac{2h}{3}, x_n + \frac{2h}{3} p_{n,2}\right). \end{cases}$$

Q-3-1 : Quelle est la formule d'intégration principale associée ?

Q-3-2 : Étudier la stabilité de ce schéma.

Q-3-3 : Montrer que ce schéma est consistant d'ordre 3.

Q-3-4 : Ce schéma est-il convergent ?

Q-4 : Reprendre la question **Q-2** Avec le schéma suivant :

$$\begin{cases} h = \frac{T}{N}, t_n = nh \quad n \in \{0, \dots, N\}, x_0 \in \mathbb{R} \text{ donné,} \\ x_{n+1} = x_n + h \left(\frac{1}{4} p_{n,1} + \frac{3}{8} p_{n,2} + \frac{3}{8} p_{n,3} \right), \quad n \in \{0, \dots, N-1\}, \\ p_{n,1} = f(t_n, x_n), \\ p_{n,2} = f\left(t_n + \frac{2h}{3}, x_n + \frac{2h}{3} p_{n,1}\right), \\ p_{n,3} = f\left(t_n + \frac{2h}{3}, x_n + \frac{2h}{3} p_{n,2}\right). \end{cases}$$

On pourra utiliser en le justifiant que : $2f\left(t + \frac{2}{3}h, x\left(t + \frac{2}{3}h\right)\right) - g(t, x(t), h) = \mathcal{O}(h^3)$, avec $g(t, y, h) = f\left(t + \frac{2}{3}h, y + \frac{2h}{3}f(t, y)\right) + f\left(t + \frac{2}{3}h, y + \frac{2h}{3}f\left(t + \frac{2h}{3}, y + \frac{2h}{3}f(t, y)\right)\right)$.

Partie - 3 Schémas de Runge-Kutta : quelques exemples de schémas implicites

Exercice- 1 Approche générale

On considère le problème différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [0, T] \\ x(0) = x^0. \end{cases} \quad (4)$$

où $x^0 \in \mathbb{R}$ est donné et $f \in \mathcal{C}_{ip}([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ suffisamment régulière.

On se donne le schéma numérique de Runge-Kutta implicite suivant :

$$(RK) \begin{cases} h = \frac{T}{N}, t_n = nh \quad n \in \{0, \dots, N\}, x_0 \in \mathbb{R} \text{ donné,} \\ x_{n+1} = x_n + \frac{h}{4} (3p_{n,2} + p_{n,3}), \quad n \in \{0, \dots, N-1\} \\ p_{n,1} = f(t_n, x_n), \\ p_{n,2} = f\left(t_n + \frac{h}{3}, x_n + \frac{h}{6}(p_{n,1} + p_{n,2})\right), \\ p_{n,3} = f\left(t_n + h, x_n + \frac{h}{4}(3p_{n,2} + p_{n,3})\right) \end{cases}$$

Q-1 : Formule d'intégration numérique principale

Q-1-1 : Quelle est la formule d'intégration numérique principale associée à ce schéma ?

Q-1-2 : Quel est le degré maximal des polynômes pour lesquels elle est exacte ?

Q-1-3 : Déterminer l'entier m maximal tels que $\forall \varphi \in \mathcal{C}^3([0, T], \mathbb{R})$ il existe une constante $C \geq 0$ vérifiant $\forall h \in]0, T], \forall t \in [t_0, t_0 + T - h]$, on ait

$$\left| \int_t^{t+h} \varphi(s) ds - \frac{h}{4} \left(3\varphi\left(t + \frac{h}{3}\right) + \varphi(t+h) \right) \right| \leq Ch^m.$$

Q-2 : Constructibilité du schéma

Q-2-1 : Etablir qu'il existe $h_* > 0$ tel que l'on puisse définir trois fonctions p_1, p_2, p_3 sur $[0, T - h], \times \mathbb{R} \times [0, h_*]$ qui vérifient

$$\begin{cases} p_1(t, y, h) = f(t, y), \\ p_2(t, y, h) = f\left(t + \frac{h}{3}, y + \frac{h}{6}(p_1(t, y, h) + p_2(t, y, h))\right), \\ p_3(t, y, h) = f\left(t + h, y + \frac{h}{4}(3p_2(t, y, h) + p_3(t, y, h))\right). \end{cases}$$

Q-2-2 : Conclure que le schéma de Runge-Kutta (RK) est constructible.

Q-3 : Stabilité du schéma

Q-3-1 : Soit $0 < h_0 < \tilde{h}_*$, montrer que les fonctions p_1, p_2, p_3 définies ci-dessus sont uniformément Lipschitziennes par rapport à la seconde variable si $0 \leq h \leq h_0$.

Q-3-2 : Soit $(\eta_n)_{0 \leq n \leq N-1} \in \mathbb{R}^N$ donné, on considère le schéma perturbé :

$$\left\{ \begin{array}{l} h = \frac{T}{N}, t_n = nh \quad n \in \{0, \dots, N\}, \tilde{x}_0 \in \mathbb{R} \text{ donné,} \\ \tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n + \frac{h}{4}(3\tilde{p}_{n,2} + \tilde{p}_{n,3}) + \eta_n, \quad n \in \{0, \dots, N-1\} \\ \tilde{p}_{n,1} = f(t_n, \tilde{x}_n), \\ \tilde{p}_{n,2} = f\left(t_n + \frac{h}{3}, \tilde{x}_n + \frac{h}{6}(\tilde{p}_{n,1} + \tilde{p}_{n,2})\right), \\ \tilde{p}_{n,3} = f\left(t_n + h, \tilde{x}_n + \frac{h}{4}(3\tilde{p}_{n,2} + \tilde{p}_{n,3})\right). \end{array} \right.$$

Justifier que cette suite $(\tilde{x}_n)_{0 \leq n \leq N}$ est bien définie.

Montrer qu'il existe une constante $S > 0$ (indépendante de h) telle que

$$|\tilde{x}_n - x_n| \leq S \left(|\tilde{x}_0 - x_0| + \sum_{j=0}^{N-1} |\eta_j| \right), \forall 0 \leq n \leq N.$$

Que peut-on en conclure pour le schéma de Runge-Kutta (RK) ?

Q-4 : Consistance et ordre du schéma

Soit x la solution de (1). Pour tout $0 < h \leq h_0, t \in [0, T - h]$, on définit l'erreur locale de troncature

$$\xi(t, h) = x(t+h) - x(t) - \frac{h}{4} \left(3p_2(t, x(t), h) + p_3(t, x(t), h) \right),$$

et on pose

$$\xi_0(t, h) = \int_t^{t+h} f(s, x(s)) ds - \frac{h}{4} \left(3f\left(t + \frac{h}{3}, x\left(t + \frac{h}{3}\right)\right) + f(t+h, x(t+h)) \right),$$

l'erreur due à la formule d'intégration numérique puis

$$\xi_2(t, h) = \frac{3h}{4} \left(f\left(t + \frac{h}{3}, x\left(t + \frac{h}{3}\right)\right) - p_2(t, x(t), h) \right),$$

$$\xi_3(t, h) = \frac{h}{4} \left(f(t+h, x(t+h)) - p_3(t, x(t), h) \right).$$

Q-4-1 : Vérifier que

$$\xi(t, h) = \xi_0(t, h) + \xi_2(t, h) + \xi_3(t, h).$$

Q-4-2 : Comment se comporte l'erreur de troncature si la fonction f est indépendante de la variable d'espace ? Que peut-on en conclure sur l'ordre de la méthode (RK) ?

Q-4-3 : Majorer chaque erreur $\xi_i(t, h), i = 2, 3$ puis donner l'ordre de consistance du schéma (RK).

Exercice- 2 *Application*

Soit T un réel donné et $f \in C^3([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ uniformément lipschitzienne en espace, de constante de Lipschitz $L \geq 0$. Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)), t \in]0, T[$$

associée à la condition initiale $x(0) = x^0$. L'entier N étant fixé, on pose $h = T/N$ et $t_n = nh$ ($0 \leq n \leq N$). Pour $\theta \in [0, 1]$, on définit la méthode suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h(\theta p_{n,1} + (1 - 2\theta)p_{n,3} + \theta p_{n,4}), \\ p_{n,1} = f(t_n, x_n), \\ p_{n,2} = f(t_n + \frac{h}{4}, x_n + \frac{h}{4}p_{n,1}), \\ p_{n,3} = f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}p_{n,2}), \\ p_{n,4} = f(t_n + h, x_n + h(\theta p_{n,1} + (1 - 2\theta)p_{n,3} + \theta p_{n,4})). \end{cases}$$

Faire l'étude de cette méthode en fonction de θ (*constructibilité, intégration principale, ordre de précision, stabilité*) et donner une estimation d'erreur générale du type $\max_{0 \leq n \leq N} |x(t_n) - x_n| \leq S(|x^0 - x_0| + CTh^p)$, avec S et C dans \mathbb{R}^+ constantes positives et $p \in \mathbb{N}$.

Exercice- 3 *Un schéma de Runge-Kutta avec surévaluation de la formule d'intégration principale*

Dans cet exercice on suppose $T < \infty$ et $p = 4$.

On suppose qu'il existe une constante $L > 0$ telle que $|f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z| \forall (y, z) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in [0, T]$

On considère le schéma suivant

$$(S) \begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(p_{n,1} + 4p_{n,2} + p_{n,3}), & n \in \{0, \dots, N\}, \\ p_{n,1} = f(t_n, x_n), \\ p_{n,2} = f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}p_{n,1}), \\ p_{n,3} = f(t_n + h, x_n + \frac{h}{6}(p_{n,1} + 4p_{n,2} + p_{n,3})). \end{cases}$$

Q-1 : Quelle est la formule d'intégration principale sous-jacente ?

Q-2 : soit $h_0 \in]0, T[$ tel que $h_0L < 6$ et soit $0 < h \leq h_0, t \in [0, T - h]$ et $y \in \mathbb{R}$. On pose

$$p_1(t, y, h) = f(t, y), \quad p_2(t, y, h) = f(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}p_1(t, y, h))$$

Montrer qu'il existe un unique $p_3 \in \mathbb{R}$ tel que

$$p_3 = f(t + h, y + \frac{h}{6}(p_1(t, y, h) + 4p_2(t, y, h) + p_3))$$

On le note $p_3(t, y, h)$. En déduire que le schéma (S) est constructible.

Q-3 : Montrer que, si $0 < h \leq h_0, t \in [0, T - h]$, les fonctions p_1, p_2, p_3 sont lipschitziennes par rapport à y , uniformément en t et h . On donnera explicitement des constantes de Lipschitz possibles.

Q-4 : Pour x solution du problème (1) et pour tous $0 < h \leq h_0, t \in [0, T - h]$, on pose :

$$\xi(t, h) = x(t + h) - x(t) - \frac{h}{6}(p_1(t, x(t), h) + 4p_2(t, x(t), h) + f(t + h, x(t + h)))$$

Q-4-1 : Montrer qu'il existe une constante K indépendante de h telle que l'on a l'estimation

$$|\xi(t, h)| \leq Kh^3.$$

Q-4-2 : Quelle est l'ordre de la méthode (S) ? Commenter sur le choix du calcul de $p_{n,2}$ par rapport à la précision de la formule d'intégration numérique.